SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 162
N° DE SÉRIE : 16

THESES

présentées devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

pour obtenir

Le Grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Bernard HANOUZET

lère Thèse : Étude de problèmes aux limites elliptiques singuliers.

2ème Thèse : Sur la méthode des éléments finis.

Soutenue le 9 Septembre 1972 devant la Commission d'Examen

M. J. C. TOUGERON, Président

M .S. BAOUENDI, Examinateur

M. C. GOULAOUIC, Examinateur

M. J. C. NEDELEC, Examinateur

SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 162
N° DE SÉRIE : 16

THESES

présentées devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

pour obtenir

Le Grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Bernard HANOUZET

---

lère Thèse : Étude de problèmes aux limites elliptiques singuliers.

2ème Thèse : Sur la méthode des éléments finis.

Soutenue le 9 Septembre 1972 devant la Commission d'Examen

M. J. C. TOUGERON, Président

M .S. BAOUENDI, Examinateur

M. C. GOULAOUIC, Examinateur

M. J. C. NEDELEC, Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. issues de la FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON-LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECQ A.

Mathématiques

Professeurs

Melle CHARPENTIER M.
M. GUERINDON J.
M. METIVIER M.
M. GIORGIUTTI I.
M. BRUNEL A.
M. TOUGERON J. C.
M. MIGNOT A.

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. LEGOUPIL J.
M. HOUDEBINE J.
M. EUVRARD D.
M. NEDELEC J. C.
M. VERJUS J. P.
M. TRILLING L.
M. FERRAND D.
M. GUIVARC'H Y.
M. KEANE M. (M. C. associé)
M. GILDELAMADRID (Prof. associé)

Physique

M. VACHER M.
M. VIGNERON L.
M. LE BOT J.
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN S.
M. LE MONTAGNER S.
M. MEVEL J. Y.
M. MEINNEL J.
M. REGENSTREIF E.
M. BRUN P.
M. LE ROUX E.
M. DUBOST
M. GUIDINI
M. HAEUSLER C.
M. ARQUES P. Y.
M. DECAMPS E.
M. NUSIMOVICI M. A.

Chimie

M. VENE J.
M. LE MOAL H.
M. LEVAS E.
M. PELTIER D.
M. PRIGENT J.
M. JOUAN P.
M. FOUCAUD A.
M. LANG J.
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT C.
M. KERFANTO M.
M. DABARD R.

M. GRANDJEAN D.
M. LUCAS J.
M. DUVAL J.
M. MARTIN G.

Zoologie

M. RICHARD G.
M. MAILLET P.
M. BOISTEL J.
M. RAZET P.
M. FOLLIOT R.
M. ALLEGRET P.
M. MANIEY J.
M. JOLY J.
M. POSTEL (Professeur associé)

M. LEFEUVRE J.C.

Botanique

M. VILLERET S.
M. CLAUSTRES G.
Melle GOAS M.
Melle GOAS G.

Mme LEMOINE C.
M. TOUFFET

Géologie

M. COGNE J.
Melle DURAND S.
M. PHILIPPOT A.

M. BOILLOT G.
M. HAMEURT J.

Le Secrétaire Général de l'Université

M. BOURDIGUEL R.

INTRODUCTION

Cette thèse, consacrée à l'étude de problèmes aux limites elliptiques singuliers, est constituée de quatre articles :

1) Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace.

2) Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre.

3) Caractérisation de classes de fonctions C^{∞} et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel. (En collaboration avec Messieurs M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC).

4) Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. (En collaboration avec Messieurs P. BOLLEY et J. CAMUS).

Les singularités rencontrés dans cette étude peuvent avoir différentes sources : singularités dues à la nature géométrique de l'ouvert - ouvert non borné (1) - ouvert à frontière irrégulière (2 et 3) - singularités dues aux opérateurs eux-mêmes - dégénérescence à l'infini (1) - dégénérescence sur la frontière de l'ouvert (2,3 et 4). Les résultats obtenus portent essentiellement sur la régularité des solutions au voisinage des points singuliers.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma plus profonde reconnaissance à Monsieur Charles GOULAOUIC dont les conseils et les encouragements constants m'ont permis de mener à bien ce travail.

Monsieur Jean-Claude NEDELEC m'a propose le sujet de seconde thèse, je l'en remercie vivement.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs Jean-Claude TOUGERON et Mohamed Salah BAOUENDI qui ont accepté de participer au Jury.

ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS - APPLICATION AU PROBLEME DE DIRICHLET DANS UN DEMI ESPACE

Par B. HANOUZET

On résoud le problème de Dirichlet pour certains opérateurs elliptiques définis dans l'espace entier ou dans un demi espace.
On obtient des résultats pour des opérateurs elliptiques dégénérés ou non ; la dégénérescence signifie ici que les coefficients de la partie principale de l'opérateur tendent vers zéro (ou vers l'infini) quand $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_1^2}$ tend vers l'infini.

Dans la première partie, on introduit des espaces de Sobolev avec poids dans un ouvert non borné, les poids étant des fonctions de la distance du point à l'origine. Pour certaines valeurs des paramètres, ces espaces coïncident avec les espaces $D^{m,p}$ obtenus par complétion de l'espace des fonctions C^{∞} à support compact par rapport à la norme de Dirichlet d'ordre m (voir [3] et [6] pour la définition de $D^{m,p}$).
Notons que c'est l'inégalité de Hardy ([5]) qui, pour un ouvert non borné joue le rôle de l'inégalité de Poincaré (voir [12] par exemple) valable pour un ouvert "borné dans une direction".

La deuxième partie est consacrée à l'étude des espaces des traces sur un hyperplan. Les méthodes habituelles liées à la théorie des semi groupes ne s'appliquent pas directement. Le théorème de surjectivité est obtenu par construction explicite d'un relèvement.

Dans la troisième partie, on étudie le problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^n$ et le problème de Dirichlet inhomogène dans un demi espace. On ne considère que des problèmes variationnels, ce qui fournit l'existence et l'unicité d'une solution dans des espaces convenables. Les résultats de régularités sont obtenus en approchant le problème par une famille de "problèmes tronqués"

et en démontrant des inégalités à priori, indépendantes des troncatures, pour ces problèmes tronqués. Ces résultats se généralisent au problème de Dirichlet inhomogène dans un ouvert Ω complémentaire d'un compact de frontière suffisamment régulière.

Nous retrouvons ici certains résultats de J. BARROS-NETO [1] qui utilise les espaces $D^{m,p}$ pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$. Notre méthode permet de s'affranchir de cette condition ; les théorèmes de traces sont plus généraux que ceux donnés dans [1]. Citons aussi L.D. KUDRJAVCEV [7] qui introduit des espaces analogues pour des fonctions poids tendant vers zéro à l'infini.

Certains résultats, démontrés ici, sont annoncés dans [4].

Le plan est le suivant :

I - Les espaces.

1 - Notations et premières propriétés.

2 - Les espaces duals.

3 - Comparaison à $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

4 - Propriétés de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

II - Les espace de traces.

1 - Les espaces $W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}_+$.

2 - Espace $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

3 - Etude des traces pour $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

4 - Espaces des traces pour $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

III - Problème de Dirichlet. Etude de la régularité.

1 - Cas de l'espace entier.

2 - Problème de Dirichlet inhomogène dans un demi espace.

I - Les espaces

1 - Notations et premières propriétés

$\mathbb{R}^n$ désignant l'espace euclidien de dimension n, on note $\mathbb{R}^n_+$ le demi espace ouvert : $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ et $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ le demi espace fermé : $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Le point générique de $\mathbb{R}^n_+$ sera noté (x',y) avec $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $y = x_n \in \mathbb{R}_+$.

D_i désignant la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$D^\lambda = D_1^{\lambda_1}\ldots D_n^{\lambda_n} = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}}$$

Les notations relatives aux espaces de distributions sont celles de [13].

Introduisons enfin les fonctions poids $(1+\rho^2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, où la fonction ρ est définie par $\rho(x) = |x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

Nous pouvons maintenant introduire les espaces :

Définition I.1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $m \in \mathbb{N}$, Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *on pose :*

$$W^{m,p}_\alpha(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid (1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\lambda|}{2}} D^\lambda u \in L^p(\Omega)\ ,\ |\lambda| \leq m\}.$$

Cette définition n'a d'intérêt que si l'ouvert Ω est non borné ; sinon, quel que soit α, l'espace coïncide avec $W^{m,p}(\Omega)$, espace de Sobolev habituel (voir [10] ou [12] par exemple). Nous avons immédiatement les propriétés :

1°) $W^{0,p}_0(\Omega) = L^p(\Omega)$

2°) $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme :

$$|u|_{W^{m,p}_\alpha(\Omega)} = \Big(\sum_{|\lambda|\leq m} \big|(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\lambda|}{2}} D^\lambda u\big|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \tag{I.1}$$

3°) On a les inclusions suivantes, avec injections continues :

$$W^{m,p}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,p}_{\alpha-1}(\Omega) \hookrightarrow \ldots\ldots \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-m}(\Omega).$$

4°) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire φ restriction à Ω d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'application

$$u \longrightarrow \varphi u$$

est linéaire continue de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

5°) Dans le cas p=2 on note $W_\alpha^m(\Omega) = W_\alpha^{m,2}(\Omega)$: $W_\alpha^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire :

$$(u,v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{|\lambda| \leq m} \int_\Omega (1+\rho^2)^{\alpha-m+|\lambda|} \, D^\lambda u \, \overline{D^\lambda v} \, dx.$$

2 - *Espaces duals*

Nous commençons par démontrer un résultat de densité.

Théorème I.1

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)}$ *est dense dans* $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Nous démontrons seulement le premier résultat, la démonstration du deuxième est analogue. On se ramène par troncatures aux propriétés de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ pour $\rho(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ pour $\rho(x) \geq 2$ et posons :

$$\varphi_k(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right), \quad u_k = \varphi_k u.$$

Nous montrons que, pour $u \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $u_k \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\text{(I.2)} \qquad \lim_{k \to +\infty} |u_k - u|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \leq m$, exprimons :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |D^\lambda(u_k - u)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, \left|\sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} (D^\mu \varphi_k)(D^{\lambda-\mu} u) - D^\lambda u\right|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{\rho(x) \geq k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |\varphi_k - 1|^p \, |D^\lambda u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ \mu \neq \lambda}} \binom{\lambda}{\mu} \left(\int_{k \leq \rho(x) \leq 2k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |(D^\mu \varphi_k)(D^{\lambda-\mu} u)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans cette inégalité, il est immédiat que le premier terme de droite tend vers zéro quand k tend vers l'infini. Pour les autres termes, on a :

$$D^{\mu}\varphi_k(x) = \frac{1}{k^{|\mu|}}(D^{\mu}\psi)\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{donc}$$

$$\int_{k\le\rho(x)\le 2k} (1+\rho^2)^{\frac{(\alpha-m+|\lambda|)p}{2}} \left|(D^{\mu}\varphi_k)(D^{\lambda-\mu}u)\right|^p dx \le$$

$$C\int_{k\le\rho(x)\le 2k} (1+\rho^2)^{\frac{(\alpha-m+|\lambda|)p}{2}} k^{-|\mu|p} \left|D^{\lambda-\mu}u\right|^p dx \le$$

$$\le C\int_{k\le\rho(x)\le 2k} (1+4k^2)^{\frac{|\mu|p}{2}} k^{-|\mu|p} (1+\rho^2)^{\frac{(\alpha-m+|\lambda|-|\mu|)p}{2}} \left|D^{\lambda-\mu}u\right|^p dx$$

$$\le C\int_{k\le\rho(x)\le 2k} (1+\rho^2)^{\frac{(\alpha-m+|\lambda-\mu|)p}{2}} \left|D^{\lambda-\mu}u\right|^p dx.$$

Comme cette dernière expression tend vers zéro quand k tend vers l'infini, on obtient (I.2).

Soit maintenant $u \in W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ à support compact, alors u appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Par suite, il existe une suite $(\Psi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, $\Psi_\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que u et Ψ_ℓ aient leurs supports dans un compact fixe et de plus

$$\lim_{\ell\to+\infty} |\Psi_\ell - u|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Alors, d'après la propriété des supports

$$\lim_{\ell\to+\infty} |\Psi_\ell - u|_{W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

ce qui termine la démonstration.

Conséquence : $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace normal, par suite son dual est un espace de distributions. Par définition on pose :

$$W_{-\alpha}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) = (W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n))' \; ; \; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Il est immédiat que, si $T \in W_{-\alpha}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$, il existe une famille de fonctions $(f_\lambda)_{|\lambda|\le m}$ (non unique), telle que :

$$\begin{cases} f_\lambda \in W_{-\alpha+m-|\lambda|}^{0,p'} \text{ , et} \\ T = \sum_{|\lambda|\le m} D^{\lambda} f_\lambda. \end{cases}$$

3 - *Comparaison à* $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Rappelons la définition de $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ (voir [3] et [6]).

Définition I.2

Pour $m \in \mathbb{N}$, $1<p<\infty$, *on note* $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *le complété de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *pour la norme*

$$|u|_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\lambda|=m} |D^\lambda u|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, cet espace est un espace de distributions et on a le résultat suivant :

Théorème I.2

Pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, *les espaces* $W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)$ *et* $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *coïncident, algébriquement et topologiquement.*

Pour φ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a évidemment :

$$|\varphi|_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq |\varphi|_{W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)}$$

il suffit donc de montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^n$, $|\lambda| < m$ on a

$$(I.3) \qquad \Big| (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda \varphi \Big|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \; |\varphi|_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Nous utilisons les coordonnées polaires $x = \rho\sigma$, $\rho \geq 0$, $\sigma \in S_{n-1}$ (sphère unité de $\mathbb{R}^n$) pour montrer d'abord que :

$$(I.4) \qquad \Big| (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda \psi \Big|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{|\mu|=|\lambda|+1} \Big| \rho^{|\mu|-m} D^\mu \varphi \Big|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$|\psi(\rho\sigma)| \leq \int_\rho^{+\infty} |D_t \psi(t\sigma)| dt$$

On obtient donc :

$$\int_{R^n} (1+\rho^2)^{(|\lambda|-m)\frac{p}{2}} |\psi(x)|^p \, dx$$

$$\leq \int_{S_{n-1}} d\sigma \int_0^{+\infty} (1+\rho^2)^{(|\lambda|-m)\frac{p}{2}} \Big(\int_\rho^{+\infty} |D_t \psi(t\sigma)| dt \Big)^p \rho^{n-1} \, d\rho$$

$$\leq C \int_{S_{n-1}} d\sigma \int_0^{+\infty} \rho^{(|\lambda|-m)p+n-1} \Big(\int_\rho^{+\infty} |D_t \psi(t\sigma)| dt \Big)^p d\rho$$

Mais l'hypothèse $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$ implique $(|\lambda|-m)p+n-1 > -1$, on peut donc appliquer l'inégalité de Hardy [5] qui fournit :

$$\left| (1+\rho^2)^{\frac{(|\lambda|-m)}{2}} \Psi \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$C \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^{+\infty} \rho^{(|\lambda|+1-m)p+n-1} |D_\rho \Psi(\rho\sigma)|^p \, d\rho \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{n} \left| \rho^{|\lambda|+1-m} D_i \Psi(x) \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

En remplaçant Ψ par $D^\lambda \Psi$ on obtient (I.4). Si $|\lambda| + 1 < m$, on peut réitérer le procédé, ce qui fournit (I.3).

Remarques

1°) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$ on a aussi (voir [1]) : $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à l'espace :

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid D^\lambda u \in L^{q_{m-|\lambda|}}(\mathbb{R}^n), \ |\lambda| \leq m, \ \frac{1}{q_{m-|\lambda|}} = \frac{1}{p} - \frac{m-|\lambda|}{n}\}.$$

2°) Sans l'hypothèse $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$, on peut obtenir aussi le résultat suivant : $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe au complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace :

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+\rho^2)^{\frac{-m}{2}} u \in L^p(\mathbb{R}^n) \ ; \ D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n), \ |\lambda| = m\}.$$

Pour généraliser le théorème I.2 au cas α quelconque, nous démontrons au préalable :

Théorème I.3

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, *l'application*

$$u \longrightarrow (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} u$$

est un isomorphisme de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *sur* $W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

L'application $u \longrightarrow (1+\rho^2)^{\frac{-\beta}{2}} u$ *est l'isomorphisme inverse.*

Cette propriété tient au fait suivant : pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C>o$ telle que

$$|D^\lambda (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}}| \leq C \, (1+\rho^2)^{\frac{\beta-|\lambda|}{2}}.$$

Pour le cas $m \geq o$, soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et posons

$v = (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} u$. Pour $|\lambda| \leq m$, on a

$$(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-\beta-m+|\lambda|}{2}} |D^\lambda v| \leq C \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} (1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\lambda-\mu|}{2}} |D^{\lambda-\mu} u|$$

et par suite

$$\left| (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} u \right|_{W^{m,p}_{\alpha-\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, |u|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

La réciproque est immédiate.

Pour le cas $m<o$, il suffit de transposer le résultat précédent.

Corollaire I.1

Pour $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$, *l'application* :

$$u \longmapsto \left(\sum_{|\lambda|=m} |D^\lambda ((1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} u)|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

définit sur $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *une norme équivalente à celle définie par* (I.1).

En effet l'application $u \longmapsto (1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} u$ est un isomorphisme de $W^{m,p}_{o}(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{m,p}_{o}(\mathbb{R}^n)$ et on applique le théorème I.2.

Corollaire I.2

L'application $u \longmapsto (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} D^\lambda u$ *est linéaire continue de* $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $W^{m-|\lambda|,p}_{\alpha-\beta}(\mathbb{R}^n)$.

4 - Propriétés de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$

Théorème I.4

$W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ *coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à* $\mathbb{R}^n_+$ *des fonctions de* $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Notons provisoirement $\mathcal{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ l'espace des restrictions à $\mathbb{R}^n_+$ des fonctions de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$|u|_{\mathcal{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)} = \inf_{v \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} |v|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

$$v|_{\mathbb{R}^n_+} = u.$$

Il est immédiat que : $\mathring{W}_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

La réciproque vient ensuite grâce au résultat suivant :

Lemme I.1

Il existe un opérateur de prolongement linéaire continu de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

On utilise la méthode de Babich [2]. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on pose :

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x',y) & \text{si } y>0 \\ \sum_{k=1}^{m} s_k \, \varphi(x',-ky) & \text{si } y<0 \end{cases}$$

En choisissant les paramètres s_k solutions du système

$$\sum_{k=1}^{m+1} s_k (-k)^j = 1 \quad , \quad j = 0,1,\ldots,m \ ,$$

$P\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$, donc $P\varphi$ appartient à $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Pour vérifier la continuité de P, on forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, D^{\lambda} P\varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |D^{\lambda}\varphi(x)|^p \, dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n_-} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, \Big|D^{\lambda} \sum_{k=1}^{m+1} s_k \, \varphi(x',-ky)\Big|^p \, dx$$

$\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n < 0\}$.

En posant $t = -ky$ dans

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |D^{\lambda}(\varphi(x',-ky))|^p \, dx$$

on obtient, à un facteur près un terme de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho^2(x',-\tfrac{t}{k}))^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |D^{\lambda}\varphi(x',t)|^p \, dx' \, dt.$$

Mais comme $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k}\rho(x',t) \leq \rho(x',\tfrac{t}{k}) \leq \rho(x',t)$$

ce qui montre que ce dernier terme est majoré, à une constante près, par

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)\frac{p}{2}} \, |D^\lambda \Psi(x',y)|^p \, dx.$$

Pour $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, donc pour $\Psi \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ on a bien :

$$|P\Psi|_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C \; |\Psi|_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Comme $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ coïncide localement avec $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, pour $m \geq 1$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$. Nous introduisons donc un nouvel espace

Définition I.3

Pour $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1<p<+\infty$, *on désigne par* $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ *l'adhérence de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

Nous notons $W^{-m,p}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ le dual de $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Cet espace est un espace de distributions.

On obtient les résultats, analogues au théorème I.3 :

1°) Pour $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'application

$$u \longmapsto (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} u$$

est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha-\beta}(\mathbb{R}^n_+)$.

2°) Pour $m \in \mathbb{Z}$, cette application est un isomorphisme de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ sur $W^{m,p}_{\alpha-\beta}(\mathbb{R}^n_+)$.

D'autre part, on a l'analogue du corollaire I.1 :

Pour $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, l'application

$$u \longmapsto \Big(\sum_{|\lambda|=m} |D^\lambda((1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} u)|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

définit sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ une norme équivalente à celle définie par (I.1).

II - Les espaces de traces.

Comme toute fonction u appartenant à $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est localement dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, la trace de u sur l'hyperplan $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ est localement dans $W^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ (voir [12] par exemple).

Nous nous proposons d'étudier le comportement à l'infini des traces sur un hyperplan des fonctions de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, nous avons besoin d'introduire de nouveaux espaces.

1 - Les espaces $W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}_+$.

Définition II.1

Pour $1<p<+\infty$, $0<\sigma<1$, *on pose*

$$W_o^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+\rho^2)^{\frac{-\sigma}{2}} u \in L^p(\mathbb{R}^n) \ ;$$
$$\forall i = 1,\dots,n, \int_0^{+\infty} t^{-1-\sigma p}\, dt \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+te_i)-u(x)|^p\, dx < \infty\}^*$$

$W_o^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$|u|_{W_o^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} = \{|(1+\rho^2)^{\frac{-\sigma}{2}} u|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} +$$
$$\text{(II.1)} \quad \sum_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} t^{-1-\sigma p}\, dt \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+te_i) - u(x)|^p\, dx\}^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}_+$ on désigne par $[s]$ la partie entière de s ; on introduit

Définition II.2

Pour $1<p<+\infty$, $s \in \mathbb{R}_+$, *on pose*

$$W_o^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W^{[s],p}_{[s]-s}(\mathbb{R}^n) \mid$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n,\ |\lambda| = [s],\ D^\lambda u \in W_o^{s-[s],p}(\mathbb{R}^n)\}$$

$W_o^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme naturelle. Pour $s \in \mathbb{N}$, on retrouve la définition I.1.

---

* $e_1, e_2, \dots, e_n$ désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par analogie avec le théorème I.3, on introduit enfin

Définition II.3

Pour $1<p<+\infty$, $s \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *on pose*

$$W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} u \in W_o^{s,p}(\mathbb{R}^n)\}$$

2 - Espace $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$

Rappelons tout d'abord la définition de la trace d'ordre j pour une fonction φ de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$.

$$(\gamma_j\varphi)(x') = (D_n^j\varphi)(x_1,\ldots,x_{n-1},o) = \frac{\partial^j\varphi}{\partial x_n^j}(x',o).$$

Dans la suite, nous poserons $\rho_n(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, pour la commodité de l'étude nous introduisons de nouveaux espaces,

Définition II.4

Pour $1<p<+\infty$, $m \in \mathbb{N}$, *on pose :*

$$X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n,\ |\lambda| \leq m,\ (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)\}.$$

$X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme naturelle

$$|u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)} = \Big(\sum_{|\lambda|\leq m} \big|(1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u\big|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

et on vérifie comme au théorème I.1 que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

L'introduction de $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ trouve son intérêt dans le fait suivant

Théorème II.1

Les espaces $W_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ *et* $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ *ont les mêmes traces sur l'hyperplan* $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = o\}$.

Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ posons $\gamma u = (\gamma_o u,\ldots,\gamma_{m-1} u)$.

Nous supposons que l'application $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \longmapsto (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^m$ se prolonge en une application continue de $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ sur un espace de Banach T et nous montrons que T est aussi l'espace des traces pour $W_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

Il est immédiat que l'espace $X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ s'injecte continuement dans $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Supposons provisoirement qu'on a su construire une application Q linéaire continue : $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \longmapsto X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, telle que, pour toute fonction u de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, Qu appartienne à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $\gamma(Qu) = \gamma u$. Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ on a alors

$$|\gamma u|_T = |\gamma Qu|_T \leq C\,|Qu|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\,|u|_{W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

donc l'application γ se prolonge en une application linéaire continue (notée aussi γ) de $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans T. γ est surjective car, si $v \in T$, il existe $u \in X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ donc $u \in W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ telle que $\gamma u = v$.

Reste à construire l'application Q.

Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\mathbb{R}^+}$ telle que $\varphi(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq 2$ et posons $\Psi(x) = \varphi((1+\rho^2_{n-1}(x'))^{-1/2} y)$,

et pour $u \in W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, $Qu = \Psi u$.

Notons que la troncature définissant Q est différente de celles utilisées habituellement. La fonction Ψ construite ici est telle que :

$$\operatorname{supp} \Psi \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y \leq 2(1+\rho^2_{n-1}(x'))^{1/2}\} ,$$

$$\Psi \equiv 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{1/2}$$

On utilisera un procédé analogue pour la construction du relèvement dans le théorème de traces (théorème II.2, partie B).

Montrons que Q est linéaire continue de $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$, $|\lambda| \leq m$, on a

$$(1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda(\Psi u) = (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} (D^\mu \Psi)(D^{\lambda-\mu} u)$$

et nous montrons que pour chaque terme de cette expression

$$\left|(1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} (D^\mu \Psi)(D^{\lambda-\mu} u)\right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left|(1+\rho^2_n(x))^{\frac{|\lambda-\mu|-m}{2}} D^{\lambda-\mu} u\right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Posons $f(x) = (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{-1/2} y$, alors $\Psi = \varphi \circ f$ et $D^\mu \Psi$ se présente sous forme d'une combinaison linéaire de termes de la forme

$$(\varphi^{(r)} \circ f)\,(D^{\nu^1} f)^{k_1} \cdots (D^{\nu^s} f)^{k_s}$$

où $1 \leq r \leq |\mu|$ et $\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^s \in \mathbb{N}^n$,

$$|\nu^1| k_1 + \ldots + |\nu^s| k_s = |\mu|$$

Pour $\nu \in \mathbb{N}^n$, $\nu = \nu' + \nu_n e_n$ (ν' indice de dérivation tangentiel : $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, 0)$) exprimons

$$D^\nu (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu_n > 1 \\ D^\nu (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} & \text{si } \nu_n = 1 \\ y\, D^\nu (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} & \text{si } \nu_n = 0 \end{cases}$$

donc, pour $0 \leq (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y \leq 2$, on obtient toujours une majoration de la forme

$$|D^\nu ((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y)| \leq C (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{-|\nu|}{2}}$$

On obtient donc

$$|D^\mu \Psi| \leq (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{-|\mu|}{2}} |\Psi_\mu|$$

où Ψ_μ est une fonction continue bornée dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ à support dans le domaine défini par $0 \leq (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y \leq 2$.

En reportant ce résultat, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}p} |D^\mu \Psi|^p \, |D^{\lambda-\mu} u|^p dx$$

$$\leq C \int_{0 \leq y \leq 2(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{1/2}} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-|\mu|-m}{2}p} |\Psi_\mu|^p \, |D^{\lambda-\mu} u|^p \, dx$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho_n^2)^{\frac{|\lambda-\mu|-m}{2}p} |D^{\lambda-\mu} u|^p \, dx,$$

ce qui montre que $|Qu|_{X_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$.

Par ailleurs, on vérifie immédiatement que, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ on a $\gamma Qu = \gamma u$.

3 - Etude des traces pour l'espace $X_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Enonçons le résultat principal

Théorème II·2

Il existe une application linéaire continue

$\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1})$ *de* $X_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$

avec les propriétés suivantes :

A) *Pour* $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\gamma u = \left(u(x',o),\ldots,\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}u\right)(x',o)\right)$

B) γ *est une application surjective*

C) *Le noyau de* γ *est égal à l'adhérence de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

La démonstration de ce théorème est l'objet des points A,B,C qui suivent.

A - Nous montrons dans cette partie que l'application $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \longmapsto \prod_{j=o}^{m-1} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, se prolonge en une application linéaire continue de $X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $\prod_{j=o}^{m-1} W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour cela, nous montrons q u'il existe une contante C>o telle que, pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et j=0,1,...,m-1, on ait

$$(II.2) \qquad |\gamma_j u|_{W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Notons d'abord que $\gamma_j u = \gamma_o \frac{\partial^j}{\partial y^j} u$ et que

$$\left|\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{X_o^{m-j,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq |u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)},$$

il suffit donc de vérifier que, pour j=0,1,...,m-1, on a

$$|\gamma_o u|_{W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_o^{m-j,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

ou encore, que pour $m \geq 1$, on a

$$|\gamma_o u|_{W_o^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Nous vérifions donc que, pour $\lambda = (\lambda',o) \in \mathbb{N}^n$, c'est-à-dire λ multi-indice de dérivation tangentielle, on a :

- si $|\lambda| \leq m-1$

$$(II.3) \quad \left|(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{(\frac{1}{p}+|\lambda|-m)\frac{p}{2}}\, D^\lambda u(x',o)\right|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

- si $|\lambda| = m-1$, pour i=1,...,n-1,

$$(II.4) \quad \left(\int_o^{+\infty} t^{-p}\,dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^\lambda u(x'+te'_i,o)-D^\lambda u(x',o)|^p\,dx'\right)^{1/p} \leq C\,|u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \quad (*)$$

(*) $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$ désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Il est immédiat ensuite que (II.3) et (II.4) impliquent (II.2).

Démonstration de (II.3).

Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on a

$$|D^\lambda u\ (x',y)|^p = -\int_y^{+\infty} D_n |D^\lambda u(x',t)|^p\ dt$$

$$\leq p \int_y^{+\infty} |D^\lambda u(x',t)|^{p-1}\ |D_n\ D^\lambda u(x',t)|\ dt$$

On obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho_{n-1}^2)^{(\frac{1}{p}+|\lambda|-m)\frac{p}{2}}\ |D^\lambda u(x',o)|^p\ dx'$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} ((1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}}\ |D^\lambda u\ (x',y)|\ )^{p-1} \cdot$$

$$((1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|+1-m}{2}}\ |D_n\ D^\lambda u(x',y)|\ )\ dx'\ dy.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on majore ce dernier terme par

$$C \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}p}\ |D^\lambda u(x',y)|^p\ dx'\ dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho_{n-1}^2)^{(|\lambda|+1-m)\frac{p}{2}}\ |D_n\ D^\lambda u(x',y)|^p\ dx'\ dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

(II.3) vient ensuite immédiatement.

Démonstration de (II.4)

Il suffit de montrer que, pour $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on a

$$\left(\int_o^{+\infty} t^{-p}\ dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x_1+t,x_2,\ldots,x_{n-1},o)-v(x',o)|^p\ dx'\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ |v|_{X_o^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

On part de l'identité (voir J.L LIONS [8]) :

$$v(x_1+t,x_2,\ldots,x_{n-1},o)-v(x',o) = \int_o^t (D_n v)(x',\sigma)\ d\sigma$$

$$-\int_o^t \{D_n v(x_1+t-\sigma,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma) - D_1 v(x_1+t-\sigma,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma)\}\ d\sigma$$

$$= \int_o^t D_n v(x',\sigma)d\sigma - \int_o^t f(x_1+t-\sigma,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma)\ d\sigma$$

et nous étudions séparément chacun des termes. De

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\int_o^t D_n v(x',\sigma)d\sigma\right|^p\ dx'\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_o^t \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n v(x',\sigma)|^p\ dx'\right)^{\frac{1}{p}} d\sigma$$

On tire l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} t^{-p}\,dt\,\{\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big|\int_0^t D_n v(x',\sigma)d\sigma\Big|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}}\}^p$$
$$< \int_0^{+\infty} t^{-p}\,dt\,\{\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n v(x',\sigma)|^p dx'\Big)^{\frac{1}{p}} d\sigma\}^p$$

En posant $F(\sigma) = \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n v(x',\sigma)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}$ et en appliquant l'inégalité de Hardy [5], on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^{-p}\,\Big|\int_0^t F(\sigma)d\sigma\Big|^p\,dt \leq C\int_0^{+\infty} |F(t)|^p\,dt$$

ce qui fournit enfin

$$\Big(\int_0^{+\infty} t^{-p}\,dt\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big|\int_0^t D_n v(x',\sigma)d\sigma\Big|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\Big(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n v(x',t)|^p\,dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\,|v|_{X_o^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Etudions maintenant le deuxième terme

$$\int_0^{+\infty} t^{-p}\,dt\,\{\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big|\int_0^t f(x_1+t-\sigma,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma)d\sigma\Big|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}}\}^p$$
$$\leq \int_0^{+\infty} t^{-p}\,dt\,\{\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1+t-\sigma,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma)|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}} d\sigma\}^p$$

Mais d'autre part, on a

$$G(t,\sigma) = \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1+t\sigma-,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma)|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x',\sigma)|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}} = G(\sigma).$$

En appliquant comme ci-dessus l'inégalité de Hardy, on obtient

$$\Big(\int_0^{+\infty} t^{-p}\,dt\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big|\int_0^t f(x_1+t-\sigma,x_2,\ldots,x_{n-1},\sigma)d\sigma\Big|^p\,dx'\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\Big(\int_0^{+\infty} |G(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}} = C\Big(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x',t)|^p\,dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\,|v|_{X_o^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

Ceci termine la démonstration du point A.

B - Nous allons construire un opérateur de relèvement R linéaire continu de $\prod_{j=o}^{m-1} W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Nous montrons d'abord qu'il suffit de construire un relèvement pour chaque composante.

En effet, supposons que, pour chaque $u_j \in W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ on sache construire $R_j\, u_j$ tel que

$$|R_j u_j|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, |u_j|_{W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\gamma_j(R_j u_j) = u_j .$$

On introduit alors l'opérateur linéaire

$$(P_j u)(x',y) = \sum_{k=1}^{m} s_k (R_{k-1}\, u_{k-1})(x',ky)$$

où les s_k sont solutions du système

$$\sum_{k=1}^{m} k^i\, s_k = \delta_i^j \ , \quad i = 0,1,\dots,m-1.$$

On a alors

$$|P_j u|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \sum_{k=o}^{m-1} |u_k|_{W_o^{m-k-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\gamma_k(P_j u) = \begin{cases} o & \text{si } k \neq j \\ u_j & \text{si } k = j \end{cases}$$

Il suffit de poser ensuite

$$Ru = \sum_{j=o}^{m-1} P_j u$$

pour obtenir le relèvement désiré.

Avant de construire le relèvement pour $u_j \in W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$, nous montrons deux résultats préliminaires.

Lemme II.1

Soit $a>o$ *donné,* $\varphi \in \mathcal{D}([o,a[)$. *Alors, pour* $\lambda \in \mathbb{N}^n$,

$$|(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}}\, D^\lambda(\varphi((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y)\, v(x',y))|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} |(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda-\mu|-m}{2}}\, \psi_\mu((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y)\, D^{\lambda-\mu} v(x',y)|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

où chaque ψ_μ *est une fonction continue bornée sur* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *à support dans* $[o,a[$.

Le résultat est immédiat en se reportant à la démonstration du théorème II.1.

Lemme II.2

Pour $\alpha \leq o$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \frac{1}{2n}$, *il existe une constante* C *indépendante de* z *telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{\alpha} \, |u(x+(1+\rho^2)^{1/2} z)|^p \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{\alpha} \, |u(x)|^p \, dx.$$

Dans $\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2(X))^{\alpha} |u(X)|^p \, dX$ on pose

$$X = x + (1+\rho^2)^{1/2} z = \Theta(x).$$

On vérifie que le jacobien de la transformation Θ vaut $1 + \sum_{i=1}^{n} x_i (1+\rho^2)^{-1/2} z_i \geq \frac{1}{2}$ et que Θ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2(X))^{\alpha} \, |u(X)|^p \, dX =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2(x+(1+\rho^2)^{1/2} z))^{\alpha} \, |u(x+(1+\rho^2)^{1/2} z)|^p \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i (1+\rho^2)^{-1/2} z_i\right) dx$$
$$\geq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2(x))^{\alpha} \, |u(x+1+\rho^2)^{1/2} z)|^p \, dx.$$

Nous construisons maintenant le relèvement en adaptant une méthode classique (voir [12] par exemple). On pourrait aussi utiliser une variante, bien que notre problème ne se place pas dans le cadre des semi groupes, de la méthode de J.L. LIONS [9].

Dans la suite nous notons $B(o,1) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \rho_{n-1}(x') < 1\}$ et soit $R \in \mathcal{D}(B(o,1))$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(x')dx' = \int_{|x'|<1} R(x')dx' = \frac{1}{j!}.$$

Pour $u \in W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ on pose

$$(II.5) \qquad v(x',y) = y^{j-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R\left(\frac{\sigma-x'}{y}\right) u(\sigma) \, d\sigma$$

ou encore

$$(II.5') \qquad v(x',y) = y^j \int_{|s|<1} R(s) \, u(sy+x') \, ds.$$

On a immadiatement

$$v(x',o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x',o) = \ldots = \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} v(x',o) = o, \quad \frac{\partial^j v}{\partial y^j}(x',o) = u(x').$$

On introduit ensuite $\varphi \in \mathcal{D}([0,\frac{1}{2(n-1)}[)$ telle que $\varphi(0) = 1$ et on pose

$$(II.6) \qquad w(x',y) = \varphi((1+\rho^2_{n-1}(x'))^{-1/2}\, y)\, v(x',y),$$

on a toujours

$$w(x',0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x',0) = \ldots = \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} w(x',0) = 0, \quad \frac{\partial^j w}{\partial y^j}(x',0) = 0.$$

D'après le lemme II.1, pour vérifier que w appartient à $X^{m,p}_o(\mathbb{R}^n_+)$, il suffit de montrer que, pour $|\lambda| \leq m$, Ψ fonction continue bornée sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ à support dans $[0,\frac{1}{2(n-1)}[$ on a

$$(II.7) \qquad (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}}\, \Psi((1+\rho^2_{n-1}(x'))^{-1/2}\, y)\, D^\lambda v(x',y) \in L^p(\mathbb{R}^n_+).$$

Nous distinguerons trois cas :

$$|\lambda| \leq m-j-1, \quad m-j \leq |\lambda| \leq m-1, \quad |\lambda| = m.$$

Remarquons aussi que, par le changement de variables qui laisse inchangées les n-1 premières variables et tel que $z = (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{-1/2}\, y$, (II.7) devient

$$(II.8) \qquad \int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(|\lambda|-m+\frac{1}{p})\frac{p}{2}}\, |\Psi(z)|^p |D^\lambda v(x',(1+\rho^2_{n-1}(x'))^{1/2}\, z)|^p dx'dz < \infty$$

1er Cas : $|\lambda| \leq m-j-1$

Posons $\lambda = \lambda' + \lambda_n e_n$ où λ' est un multi-indice de dérivation tangentielle, (II.5') devient

$$D^\lambda v(x',y) = \sum_{\substack{h \leq \lambda_n \\ h \leq j}} \binom{\lambda_n}{h} j(j-1)\ldots(j-h+1)\, y^{j-h} \cdot$$

$$\int_{|s|<1} R(s) \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i D_i\right)^{\lambda_n - h} D^{\lambda'} u\right)(sy+x')\, ds$$

(II.8) est majoré par une somme de termes de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(|\lambda|-m+\frac{1}{p})\frac{p}{2}}\, |\Psi(z)|^p\, (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(j-h)\frac{p}{2}}\, z^{(j-h)p} \cdot$$

$$\left|\int_{|s|<1} S(s)\, D^{\lambda'+\mu'} u(x'+s(1+\rho^2_{n-1})^{1/2}\, z)\, ds\right|^p dx'\, dz$$

avec $S \in \mathcal{D}(B(0,1))$, $|\mu'| = \lambda_n - h$.

Ce dernier terme est majoré par

$$C \int_{|s|<1} |S(s)|^p \, ds \int_{o \leq z \leq \frac{1}{2(n-1)}} z^{(j-h)p} \, |\Psi(z)|^p \, dz \quad x$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{(|\lambda|-h+(\frac{1}{p}-1)-(m-j-1))\frac{p}{2}} \, |D^{\lambda'+\mu'} u(s(1+\rho^2)^{1/2} z+x')|^p \, dx'$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{((\frac{1}{p}-1)+|\lambda'|+|\mu'|-(m-j-1))\frac{p}{2}} \, |D^{\lambda'+\mu'} u(x')|^p \, dx'$$

(cette dernière majoration est obtenue grâce au lemme II.2)

$$\leq C \, |u|^p_{W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

<u>2ème Cas</u> $m-j \leq |\lambda| \leq m-1$

Posons $\lambda = \mu+\nu$ avec $|\nu| = m-j-1$, donc $|\mu| \leq j$.

On vérifie d'abord qu'il existe $M \in \mathcal{D}(B(o,1))$ telle que

$$(II.9) \qquad D^\mu v(x',y) = y^{j-|\mu|} \int_{|s|<1} M(s) \, u(ys+x') \, ds.$$

Il suffit de montrer ce résultat pour $|\mu|=1$. Partant de (II.5) on a, pour une dérivée tangentielle, soit D_1

$$D_1 v(x,y) = y^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} - D_1 R(\frac{\sigma-x'}{y}) \, u(\sigma) \, d\sigma$$

$$= y^{j-1} \int_{|s|<1} - D_1 R(s) \, u(ys+x') \, ds,$$

et pour la dérivée normale

$$D_n v(x',y) = (j-n+1) \, y^{j-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\frac{\sigma-x'}{y}) \, u(\sigma) \, d\sigma$$

$$+ y^{j-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} - \sum_{i=1}^{n} D_i R(\frac{\sigma-x'}{y}) \, \frac{\sigma_i - x_i'}{y^2} \, u(\sigma) \, d\sigma$$

$$= y^{j-1} \int_{|s|<1} ((j-n+1)R(s) - \sum_{i=1}^{n} D_i R(s) s_i) \, u(ys+x') \, ds.$$

On pose ensuite $\nu = \nu' + \nu_n e_n$ et on a comme au 1er cas en utilisant (II.9)

$$D^\lambda v(x',y) = \sum_{\substack{h \leq \nu_n \\ h \geq j-|\mu|}} \binom{\nu_n}{h} (j-|\mu|)\ldots(j-|\mu|-h+1) \, y^{j-|\mu|-h} \cdot$$

$$\int_{|s|<1} M(s) \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i D_i \right)^{\nu_n - h} D^{\nu'} u \right)(sy+x') \, ds.$$

(II.8) est majoré par une somme de termes de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(|\lambda|-m+\frac{1}{p})\frac{p}{2}} \; |\Psi(z)|^p \; z^{(j-|\mu|-h)p} \; (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(j-|\mu|-h)\frac{p}{2}} \cdot$$

$$\Big| \int_{|s|<1} N(s)\, D^{\nu'+\nu''}\, u(s(1+\rho^2)^{1/2}\, z+x')\, ds \Big|^p \, dx'\, dz$$

où $N \in \mathcal{D}(B(o,1))$, ν'' est un indice de dérivation tangentielle vérifiant

$|\nu''| = \nu_n - h$.

En utilisant en particulier le lemme II.2 on majore ce terme par

$$C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(\frac{1}{p}-1)+(|\lambda|-|\mu|-h)-(m-j-1))\frac{p}{2}} \; |D^{\nu'+\nu''}\, u(x')|^p \, dx'$$

$$\leq C \, |u|^p_{W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

puisque $|\lambda|-|\mu|-h = |\nu'+\nu''|$

$\underline{3^{\text{eme}} \text{ Cas}}$ $|\lambda| = m$

Posons $\lambda = \mu+\nu$ avec $|\mu|=j$. En utilisant (II.9) on a

$$D^{\mu} v(x',y) = \int_{|s|<1} M(s)\, u(ys+x')\, dx'.$$

$D^{\lambda} v(x',y)$ se présente comme une somme de termes de la forme

$$D \int_{|s|<1} N(s)\, (D^{\nu'} u)\, (ys+x')\, ds$$

où $N \in \mathcal{D}(B(o,1))$, D est une dérivée d'ordre 1, ν' est un multi-indice de dérivation tangentielle vérifiant $|\nu'| = m-j-1$. Comme (définition II.2)

$$|D^{\nu'} u|_{W_o^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq |u|_{W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

il suffit de vérifier que, pour $v_o \in W_o^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ on a

$$\text{(II.10)} \quad \Big| D \int_{|s|<1} N(s)\, v_o(ys+x')ds \Big|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \, |v_o|_{W_o^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Posons $v_1 = \int_{|s|<1} N(s)\, v_o(ys+x')ds$. Pour D dérivée tangentielle, soit D_1 on a

$$D_1 v_1(x',y) = D_1 \{ y^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} N(\tfrac{\sigma-x'}{y})\, v_o(\sigma)\, d\sigma \} = -y^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (D_1 N)(\tfrac{\sigma-x'}{y}) v_o(\sigma) d\sigma$$

et comme $y^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (D_1 N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) v_o(x')\,d\sigma = o$, on obtient

$$D_1 v_1(x',y) = y^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (D_1 N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right)(v_o(x') - v_o(\sigma))\,d\sigma$$

$$= \int_{|s|<1} (D_1 N)(s)\, \frac{v_o(x') - v_o(ys+x')}{y}\, d\sigma \quad .$$

Pour D dérivée normale on a de même :

$$D_n v_1(x',y) = -y^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left((n-1)N\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} (D_i N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) \frac{\sigma_i - x'_i}{y}\right) v_o(\sigma)\,d\sigma$$

et comme :

$$y^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (n-1)N\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} (D_i N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) \left(\frac{\sigma_i - x'_i}{y}\right) v_o(x')\,d\sigma = o$$

on obtient

$$D_n v_1(x',y) = \int_{|s|<1} \left((n-1)N(s) + \sum_{i=1}^{n} s_i\, D_i\, N(s)\right) \frac{v_o(x') - v_o(ys+x')}{y}\, ds.$$

On a donc toujours

$$Dv_1(x',y) = \int_{|s|<1} P(s)\, \frac{v_o(x') - v_o(ys+x')}{y}\, ds$$

où $P \in \mathcal{D}(B(o,1))$.

Comme $|\lambda| = m$ et Ψ est une fonction bornée, on est amené à majorer (cf.(II.7))

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dv_1(x',y)|^p\, dx'dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} dx'dy \left| \int_{|s|<1} P(s)\, \frac{v_o(x') - v_o(ys+x')}{y}\, ds \right|^p$$

$$\leq C \int_{|s|<1} |P(s)|^p\, ds \int_o^{+\infty} y^{-p}\, dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_o(x') - v_o(ys+x')|^p\, ds.$$

On décompose $v_o(x') - v_o(ys+x')$ sous la forme

$$v(ys+x') - v_o(x') = \sum_{i=1}^{n-1} v_o\Big(y \sum_{j \leq i} s_j\, e'_j + x'\Big) - v_o\Big(y \sum_{j \leq i-1} s_j\, e'_j + x'\Big)$$

et on étudie séparément chacun des termes

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| v_o\Big(y \sum_{j \leq i} s_j\, e'_j + x'\Big) - v_o\Big(y \sum_{j \leq i-1} s_j\, e'_j + x'\Big) \right|^p dx'$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_o(y\, s_i\, e'_i + X') - v_o(X')|^p\, dX' & \text{si } s_i \geq o \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_o(-y\, s_i\, e'_i + X') - v_o(X')|^p\, dX' & \text{si } s_i < o. \end{cases}$$

Pour $s_i>o$ on a alors, en posant $z = y\, s_i$

$$\int_o^{+\infty} y^{-p}\, dy \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_o(ys_ie_i'+X')-v_o(X')|^p\, dX'$$

$$= \int_o^{+\infty} s_i^{p-1}\, z^{-p}\, dz \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_o(ze_i+X')-v_o(X')|^p\, dX'$$

$$\leq C \int_o^{+\infty} z^{-p}\, dz \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v_o(ze_i+X')-v_o(X')|^p\, dX'$$

car $|s| < 1$.

Ce cas $s_i<o$ se traite de la même façon et en définitive

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dv_1(x',y)|^p\, dx'dy \leq$$

$$C \int_{|s|<1} |P(s)|^p\, ds \int_o^{+\infty} z^{-p}\, dz \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} |v_o(ze_i'+x')-v_o(x')|^p\, dx'$$

$$\leq C \left|v_o\right|^p_{W_o^{-1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

ce qui montre (II.10) et termine la démonstration de B.

C - Notons $\overset{\circ}{X}{}_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

On a évidemment

$$\gamma(\overset{\circ}{X}{}_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)) = o \in \prod_{j=o}^{m-1} W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Réciproquement, il suffit d'apapter une démonstration classique (voir J.L. LIONS [10] par exemple). Soit $u \in X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ telle que $\gamma u=o$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $\varphi(y)=o$ pour $o\leq y\leq 1$, $\varphi(y)=1$ pour $y\geq 2$, $o\leq\varphi(y)\leq 1$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_k(x',y) = \varphi(ky)\, u(x',y) = \varphi_k(y)\, u(x',y)$$

et on montre que

$$\text{(II.11)} \qquad \lim_{k\to+\infty} \left|u_k-u\right|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = o.$$

En supposant ce point établi, par troncature et régularisation, on montre ensuite que, pour chaque k, il existe une suite v_ℓ, $v_\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, telle que

$$\lim_{\ell\to+\infty} \left|v_\ell-u_k\right|_{X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} = o$$

ce qui prouve l'assertion. □

Il reste à démontrer (II.11).

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^n$, $|\lambda| \leq m$, et posons $\lambda = \lambda' + \lambda_n e_n$ où λ' est un multi-indice de dérivation tangentielle, alors

$$D^{\lambda} u_k = D_n^{\lambda_n} \varphi_k \; D^{\lambda'} u.$$

Mais $v = D^{\lambda'} u \in X_o^{m-|\lambda'|,p}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\gamma v = o \in \prod_{j=o}^{m-|\lambda'|-1} W_o^{m-|\lambda'|-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ montrent que pour démontrer (II.11), il suffit de vérifier que pour $u \in X_o^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\gamma u = o$, on a

$$\text{(II.12)} \qquad \lim_{k\to\infty} \left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} \; D_n^j (u_k - u) \right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = o.$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient

$$\left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} \; D_n (u_k - u) \right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} \; (\varphi_k - 1) \; D_n^j u \right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq j} \binom{j}{i} \left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} \; k^i \; \varphi^{(i)}(ky) \; D_n^{j-i} \; u \right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

Il est immédiat que le premier terme de droite a pour limite O, pour les autres termes, comme $\gamma u = o$, on a

$$D_n^{j-i} \; u(x',y) = \int_o^y dt_1 \int_o^{t_1} dt_2 \ldots \int_o^{t_{j-i+1}} D_n^j \; u(x', t_{j-i}) \; dt_{j-i}.$$

Par ailleurs, par l'inégalité de Hölder, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$\left| \int_o^{t_{j-i+1}} D_n^j \; u(x', t_{j-i}) dt_{j-i} \right| \leq t_{j-i+1}^{\frac{1}{q}} \left(\int_o^{t_{j-i+1}} |D_n^j \; u(x', t_{j-i})|^p \; dt_{j-i} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq t_{j-i+1}^{\frac{1}{q}} \left(\int_o^{\frac{2}{k}} |D_n^j \; u(x', t_{j-i})|^p \; dt_{j-i} \right)^{\frac{1}{p}}$$

car $o \leq t_{j-i+1} \leq \frac{2}{k}$.

On tire alors que, presque partout en (x',y)

$$|D_n^{j-i} \; u(x',y)|^p \leq C \; y^{\frac{p}{q} + (i-1)p} \int_o^{\frac{2}{k}} |D_n^j \; u(x',s)|^p \; ds$$

et par suite :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{(j-m)\frac{p}{2}} \; |k^i \; \varphi^{(i)}(ky) \; D_n^{j-i} \; u(x',y)|^p \; dx'dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_o^{\frac{2}{k}} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{(j-m)\frac{p}{2}} \; |D_n^j \; u(x',y)|^p \; dx' \; dy$$

a pour limite O quand k tend vers l'infini.

4 - Espaces des traces pour $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$

On a le résultat suivant

Théorème II.3

Il existe une application linéaire continue $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1})$ *de* $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ *avec les propriétés suivantes :*

A) Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\gamma u = (u(x',0), \frac{\partial u}{\partial y}(x',0), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x',0))$

B) γ *est une application surjective.*

C) $\gamma^{-1}(0) = \mathring{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour $\alpha=0$, ce résultat est une conséquence immédiate des théorème II.1 et II.2.

Pour α quelconque, nous introduisons d'abord

$$X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \; ; \; \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, \; |\lambda| \leq m, \; (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{\alpha+|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)\}.$$

On vérifie que les espaces $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ et $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ ont mêmes espaces de traces.

D'autre part, l'application $u \longmapsto (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{\alpha}{2}} u$ étant un isomorphisme de $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $X_0^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, l'application $u \longmapsto \gamma((1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{\alpha}{2}} u) = (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{\alpha}{2}} \gamma u$ est linéaire continue surjective de $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$, alors (définition II.3) l'application $u \longmapsto \gamma u$ est linéaire continue de $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

III - Problème de Dirichlet. Etude de la régularité

On étudie certains problèmes de Dirichlet dans $\mathbb{R}^n$, dans le complémentaire d'un compact ou dans un demi-espace.

On ne considère que des équations elliptiques d'ordre 2, l'ordre 2m se traiterait de façon analogue.

1 - Cas de l'espace entier

On traite d'abord le cas où l'on peut prendre $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme espace pivot pour la méthode variationnelle (théorème III.1), le cas général (théorème III.2) sera ensuite une conséquence du théorème I.3.

Soit a une forme intégrodifférentielle définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$(III.1) \quad a(u,v) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i \overline{D^j v} \, dx$$

On suppose que :

$$(III.2) \quad a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ce qui implique que a est continue sur $W_1^1(\mathbb{R}^n) \times W_1^1(\mathbb{R}^n)$, et on suppose d'autre part que a est $W_1^1(\mathbb{R}^n)$-coercitive c'est-à-dire :

(III.3) $\exists\, \delta > 0$ tel que, $\forall\, u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Re}\, a(u,u) \geq \delta \, |u|^2_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}$.

Remarque :

Pour que (III.3) soit réalisé, il suffit que $\mathrm{Re}\, a_{oo}$ soit suffisamment grand et que

$$(III.4) \quad \begin{cases} \exists \delta' > 0 \text{ tel que, } \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ \mathrm{Re} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x)\, \xi^i \bar{\xi}^j \geq \delta' \, |\xi|^2 \end{cases}$$

De plus, pour $n \geq 3$ (donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} > 0$) le théorème I.2 montre que (III.3) est réalisé pour des formes homogènes vérifiant (III.4).

Les hypothèses (III.2), (III.3) permettent d'utiliser le lemme de Lax Milgramm (voir [10] par exemple) ; on a

Proposition

Si $f \in W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)$, *le problème*

$$(III.5) \quad \begin{cases} u \in W_1^1(\mathbb{R}^n) \\ \forall\, v \in W_1^1(\mathbb{R}^n),\ a(u,v) = (f,\bar{v})_{W_{-1}^{-1} \times W_1^1} \end{cases}$$

admet une solution unique.

Introduisons l'opérateur A(x,D) associé à a :

$$A(x,D) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} (-1)^{|j|} D^j \left((1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i \right) ;$$

on obtient l'énoncé équivalent :

(III.6) A(x,D) est un isomorphisme de $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

On se propose de déterminer des propriétés de u quand Au appartient à un espace plus petit que $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, en particulier quand Au appartient à $\bigcap_{k\geq 0} W_k^k(\mathbb{R}^n)$.

Nous supposons réalisées les hypothèses :

(III.7) $\forall \lambda \in \mathbb{N}^n$, $\exists C>0$ tel que $|D^\lambda a_{ij}| < C(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}}$

Ces dernières hypothèses sont naturelles dans le cas d'une variable pour assurer que A est linéaire continue de $\bigcap_{k\geq 0} W_k^k(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème III.1

Les hypothèses (III.2), (III.3), (III.7) étant réalisées, pour $k\geq 1$, *l'opérateur* A *est un isomorphisme topologique de* $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ *sur* $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Plus précisémment, si les hypothèses (III.7) sont réalisées pour $|\lambda|\leq \ell$, le théorème reste vrai pour $k\leq \ell$.

Pour la commodité de l'étude, nous écrivons aussi l'opérateur A(x,D) sous la forme

$$A(x,D) = \sum_{|\lambda|\leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda(x) D^\lambda ;$$

l'hypothèse (III.7) devient alors

(III.7') $\forall \mu \in \mathbb{N}^n$, $\exists C>0$ tel que $|D^\mu a_\lambda| \leq C (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}}$

Il est immédiat par le corollaire I.2 que A est linéaire continue de $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ dans $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$. Dans les lemmes qui suivent, nous montrons d'abord que $A(W_2^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de régularité "à l'intérieur" pour les opérateurs elliptiques (théorème de Friedrichs, voir [11] par exemple) les conditions :

$$u \in W_1^1(\mathbb{R}^n), \quad A u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

impliquent $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *. Nous utilisons ce résultat en tronquant la solution du problème (III.5), puis en démontrant des inégalités à priori indépendantes de la troncature

---

* $H^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev usuel d'ordre s, voir [11] par exemple.

Remarquons cependant que, par la méthode des quotients différentiels on obtiendrait directement :

Si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{N}^n$ *vérifiant* $|\lambda|=2$ *on a* $(1+\rho^2)^{1/2} D^\lambda u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Cette méthode ne semble pas pouvoir fournir le théorème III.1, introduisons donc :

Le problème tronqué

Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \Psi \leq 1$, satisfaisant à

$$\Psi(x) \equiv 1 \text{ pour } \rho(x) \leq 1, \quad \Psi(x) \equiv 0 \text{ pour } \rho(x) \geq 2.$$

Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\Psi_k(x) = \Psi(\frac{x}{k})$ et $u_k = \Psi_k u$.

Alors si u (dans $W_1^1(\mathbb{R}^n)$) est solution de $Au=f$, u_k (dans $W_1^1(\mathbb{R}^n)$) est solution du problème tronqué d'odre k

$$(P_k) \quad Au_k = g_k = \Psi_k Au + [A,\Psi_k] u$$

où $[A,\Psi_k]$ désigne le commutateur de A et Ψ_k :

$$[A,\Psi_k] u = A(\Psi_k u) - \Psi_k Au.$$

Le deuxième membre g_k du problème (P_k) possède la propriété suivante :

Lemme III.1

Si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $Au = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *alors il existe une constante* $C>0$ *telle que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |g_k|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(|u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} + |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Il est immédiat que $|\Psi_k Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Etudions

$$[A,\Psi_k] u = \sum_{|\lambda| \leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda \, D^\lambda(\Psi_k u) - \Psi_k (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda D^\lambda u.$$

Nous avons des termes de trois types :

$(1+\rho^2)^{1/2}\ (D_j\Psi_k)u\ ;\ (1+\rho^2)(D_i\Psi_k)(D_j u)\ ;\ (1+\rho^2)(D_iD_j\Psi_k)u.$

$$1°)\ \left|(1+\rho^2)^{1/2}\ (D_j\Psi_k)u\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)\ \frac{1}{k^2}\ \left|(D_j\Psi_k)(\tfrac{x}{k})\right|^2\ |u|^2\ dx$$

$$\leq C\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} \frac{1+4k^2}{k^2}\ |u|^2\ dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\ dx.$$

$$2°)\ \left|(1+\rho^2)(D_i\Psi_k)\ D_j u\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^2\ \frac{1}{k^2}\ \left|(D_i\Psi)(\tfrac{x}{k})\right|^2\ |D_j u|^2\ dx$$

$$\leq C\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} \frac{1+4k^2}{k^2}\ (1+\rho^2(x))\ |D_j u|^2\ dx \leq C\ \left|(1+\rho^2)^{1/2}\ D_j u\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

$$3°)\ \left|(1+\rho^2)(D_iD_j\Psi_k)u\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^2\ \frac{1}{k^4}\ \left|(D_iD_j\Psi)(\tfrac{x}{k})\right|^2\ |u|^2\ dx$$

$$\leq \int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} \frac{(1+4k^2)^2}{k^4}\ |u|^2\ dx \leq C\ |u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ces trois majorations montrent que

$$\left|[A,\Psi_k]u\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\ |u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}$$

où C est une constante qui dépend de Ψ mais est indépendante de k.

Démontrons une nouvelle inégalité à priori :

Lemme III.2

Si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *il existe une constante* $C>0$ *telle que :*

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \left|(1+\rho^2)^{1/2}\ Du_k\right|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \left(|Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}\right)$$

(D désigne une dérivée quelconque).

$(1+\rho^2)^{1/2}\ Du_k$ est solution de

$$A((1+\rho^2)^{1/2}\ Du_k) = (1+\rho^2)^{1/2}\ Dg_k + [A,(1+\rho^2)^{1/2}\ D]\ u_k.$$

u appartient à $H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ donc $(1+\rho^2)^{1/2}\ Du_k$ appartient à $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, et par (III,6) on obtient :

$$(III.8)\ \left|(1+\rho^2)^{1/2}\ Du_k\right|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \left|(1+\rho^2)^{1/2}\ Dg_k + [A,(1+\rho^2)^{1/2}]D\ u_k\right|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Il suffit de majorer le deuxième membre de cette inégalité indépendamment de k. Par le lemme III.2, on a

$$(III.9) \quad \left| (1+\rho^2)^{1/2} Dg_k \right|_{W^{-1}_{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(|u|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)} + |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)$$

Reste à étudier

$$\left[A, (1+\rho^2)^{1/2} D\right] u_k = \sum_{|\lambda| \leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda \left[D^\lambda, (1+\rho^2)^{1/2}\right] Du_k$$

$$+ \sum_{|\lambda| \leq 2} (1+\rho^2)^{1/2} \left[(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda, D\right] D^\lambda u_k .$$

En utilisant (II.7') et le corollaire I.2, on obtient

$$(III.10) \quad \left| \left[A, (1+\rho^2)^{1/2} D\right] u_k \right|_{W^{-1}_{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left| u_k \right|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)} \leq C \left| u \right|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)} .$$

(Pour la dernière inégalité, il suffit de se reporter à la démonstration du théorème I.1).

(III.9) et (III.10) montrent (III.8) donc le lemme III.2.

Ce dernier lemme montre le théorème III.1 pour k=2. En effet, par argument de compacité faible de la boule unité de $W^1_1(\mathbb{R}^n)$ on prouve que, si $u \in W^1_1(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $(1+\rho^2)^{1/2} Du$ appartient à $W^1_1(\mathbb{R}^n)$ donc u appartient à $W^2_2(\mathbb{R}^n)$. Le fait que A est un isomorphisme de $W^2_2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ résulte ensuite du théorème de Banach. La démonstration du théorème III.1 se termine ensuite par récurrence. Supposons démontré que, jusqu'à l'ordre k ($k \geq 1$) les conditions $u \in W^k_k(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ impliquent $u \in W^{k+1}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Supposons $Au \in W^k_k(\mathbb{R}^n)$; alors $(1+\rho^2)^{1/2} Du$ appartient à $W^k_k(\mathbb{R}^n)$ et est solution de

$$A\left((1+\rho^2)^{1/2} Du\right) = (1+\rho^2)^{1/2} D(Au) + \left[A, (1+\rho^2)^{1/2} D\right] u.$$

On vérifie que :

$$\left| (1+\rho^2)^{1/2} D(Au) \right|_{W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left| Au \right|_{W^k_k(\mathbb{R}^n)} ,$$

$$\left| \left[A, (1+\rho^2)^{1/2} D\right] u \right|_{W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left| u \right|_{W^{k+1}_{k+1}(\mathbb{R}^n)} .$$

Alors, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$(1+\rho^2)^{1/2}\, Du \in W^{k+1}_{k+1}(\mathbb{R}^n) \text{ donc } u \in W^{k+2}_{k+2}(\mathbb{R}^n),$$

ce qui termine la démonstration.

Le théorème III.1 nous donne un résultat de régularité par des opérateurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que les coefficients de la partie principale tendent vers l'infini quand $\rho(x)$ tend vers l'infini. Le théorème I.3 nous permet d'utiliser ces résultats pour des problèmes dégénérés à l'infini.

Soit $b(u,v)$ une forme intégro-différentielle définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par

$$b(u,v) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{\alpha+\frac{|i|+|j|}{2}}\, b_{ij}(x)\, D^i u\, \overline{D^j v}\, dx$$

où α est un réel quelconque.

On suppose que

(III.11) $\quad b_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

(III.12) $\quad b$ est $W^1_{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)$-coercitive.

Alors l'opérateur

$$B(x,D) = \sum_{\substack{|i|=1 \\ |j|=1}} (-1)^{|j|}\, D^j\left((1+\rho^2)^{\alpha+\frac{|i|+|j|}{2}}\, b_{ij}\, D^i\right)$$

est un isomorphisme de $W^1_{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{-1}_{-(\alpha+1)}(\mathbb{R}^n)$.

On a le résultat de régularité suivant

Théorème III.2

Sous les hypothèses (III.11), (III.12), (III.7), pour $k \geq 1$, *l'opérateur* B *est un isomorphisme topologique de* $W^k_{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *sur* $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{R}$, introduisons $T_\beta u = (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}}\, u$.

La forme intégro-différentielle a définie par

$$a(u,v) = b(T_{-\alpha}u,\, T_{-\alpha}v)$$

vérifie les hypothèses (III.2), (III.3), (III.7), pour $k \geq 1$, l'opérateur A associé à a est donc un isomorphisme de $W^k_k(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{k-2}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Mais $a(u,v) = \langle Au, \bar{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$

et

$$b(T_{-\alpha}u, T_{-\alpha}v) = \langle T_{-\alpha} B T_{-\alpha} u, \bar{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

donc $B = T_\alpha A T_\alpha$ et le théorème III.2 découle du théorème I.3

Remarque :

Pour $\alpha = -1$, $n \geq 3$, la classe des opérateurs B contient ceux étudiés par J. Barros Neto [1].

Donnons quelques applications du théorème III.2.

Application 1

Soit B(x,D) un opérateur d'ordre 2

$$B(x,D) = \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} (-1)^{|j|} D^j \left((1+\rho^2)^{\alpha + \frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij} D^i \right)$$

dont les coefficients b_{ij} vérifient (III.2), (III.4), (III.7).

Soit $\beta \in \mathbb{R}$, il existe une constante a_o telle que, pour $a \geq a_o$ et pour tout $k \geq 1$, l'opérateur $B + (1+\rho^2)^\alpha a I$ soit un isomorphisme de $W^k_{k+\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Nous introduisons l'opérateur $C(x,D) = T_\beta B(x,D) T_{-\beta} + (1+\rho^2)^\alpha a I$.

Les opérateurs B et C ont même partie principale ; on a

$$C(x,D) = \sum_{|i|=|j|=1} (-1)^{|j|} D^j \left((1+\rho^2)^{\alpha + \frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij} D^i \right)$$

$$+ \sum_{|i|+|j| \leq 1} (-1)^{|j|} D^j \left((1+\rho^2)^{\alpha + \frac{|i|+|j|}{2}} c_{ij} D^i \right) + (1+\rho^2)^\alpha a I.$$

Pour a assez grand l'opérateur C vérifie (III.11), (III.12), (III.7) donc, par le théorème III.2, C est un isomorphisme de $W^k_{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Mais comme $B + (1+\rho^2)^\alpha a I = T_{-\beta} C T_\beta$, par le théorème I.3, $B + (1+\rho^2)^\alpha a I$ est un isomorphisme de $W^k_{k+\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Cette propriété permet de résoudre en particulier l'équation

$$Bu + (1+\rho^2)^\alpha a u = f$$

où f est un polynôme.

Il existe alors $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f \in \bigcap_{k\geq 0} W^k_{k-\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n)$, il suffit pour cela de déterminer β tel que $f \in W^0_{\beta-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Pour a assez grand, l'équation a donc une solution unique dont la croissante est aussi de type polynomiale :

$$u \in \bigcap_{k\geq 0} W^k_{k+\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n).$$

Application 2.

Résolution du problème de Dirichlet dans un ouvert Ω non borné, complémentaire de l'adhérence d'un ouvert borné très régulier.

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension n-1, ω étant localement d'un seul côté de Γ (voir [11]). On pose $\Omega = \complement\overline{\omega}$; Ω a pour frontière Γ et possède des propriétés analogues à celles de ω.

L'espace $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$ peut se caractériser comme suit.

Soit Ψ et Ψ deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ possèdant les propriétés suivantes

$\Psi+\Psi = 1$, $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq R$,

supp $\Psi \subset B(0,R+1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R+1\}$.

Choisissons $R>0$ tel que $\overline{\omega} \subset B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ et posons $\Omega_1 = \complement_{B(0,R+1)}\overline{\omega}$.

Alors, pour que u appartienne à $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$, il faut et il suffit que Ψu appartienne à $W^{m,p}(\Omega_1)$ et $\widetilde{\Psi u} \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ ($\widetilde{\Psi u}$ désigne le prolongement par 0 de Ψu sur $B(0,R)$). L'étude des traces de u sur Γ se ramène au cas classique (voir [10]) ; on obtient le résultat suivant :

L'application $u \longrightarrow \gamma u = (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)$ est linéaire surjective de $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$; le noyau de l'application γ coïncide avec l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$, espace que nous notons $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\Omega)$.

On définit comme précédemment

$$b(u,v) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} \int_\Omega (1+\rho^2)^{\alpha+\frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij} D^i u \overline{D^j v}\, dx$$

et on suppose que b vérifie (III,11), (III.12), (III.7).

En particulier, on a :

$$b_{ij} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \cap L^{\infty}(\Omega)$$

$$b \text{ est } \overset{\circ}{W}{}^{1}_{\alpha+1}(\Omega)\text{-coercitive.}$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème III.3

Pour $k \geq 1$, *l'opérateur* (B,γ_0) *est un isomorphisme de* $W^{k}_{k+\alpha}(\Omega)$ *sur* $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\Omega) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Par la méthode habituelle on se ramène au problème de Dirichlet homogène ; il suffit donc de démontrer que, pour $k \geq 1$, l'opérateur B est un isomorphisme de $W^{k}_{k+\alpha}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{1+\alpha}(\Omega)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\Omega)$.

Le résultat est évident pour k=1. Supposons que la propriété soit vraie pour $1 \leq \ell \leq k$ et soit :

$$u \in W^{k}_{k+\alpha}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{1+\alpha}(\Omega) \text{ tel que } Bu \in W^{k-1}_{k-1-\alpha}(\Omega).$$

On choisit deux fonctions φ et Ψ comme ci-dessus.

φu est solution du problème de Dirichlet homogène dans l'ouvert borné Ω_1

$$\begin{cases} \varphi u \in H^{k}(\Omega_1) \cap H^{1}_{0}(\Omega_1) \\ B(\varphi u) = \varphi Bu + [B,\varphi]\, u \in H^{k-1}(\Omega_1) \end{cases}$$

par conséquent $\varphi u \in H^{k+1}(\Omega_1)$, ce qui implique que $\varphi u \in W^{k+1}_{k+1+\alpha}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{\alpha+1}(\Omega)$

$\widetilde{\varphi u}$ est solution du problème

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi u} \in W^{k}_{k+\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ B(\widetilde{\varphi u}) = \widetilde{\varphi Bu} + \widetilde{[B,\varphi]}\, u \in W^{k-1}_{k-1-\alpha}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

par le théorème III.2, on a donc

$$\varphi u \in W^{k+1}_{k+1+\alpha}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \varphi u \in W^{k+1}_{k+1+\alpha}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{1+\alpha}(\Omega).$$

2 - Problème de Dirichlet inhomogène dans un demi espace.

On définit une forme intégro-différentielle a sur $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \times \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ par

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i u \overline{D^j v} \, dx$$

et on suppose que

(III.13) $\quad a_{ij} \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$

(III.14) $\quad a$ est $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\mathbb{R}^n_+)$-coercitive.

Alors l'opérateur

$$A(x,D) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} (-1)^{|j|} D^j \left((1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i \right)$$

associé à a est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\mathbb{R}^n_+)$ sur $W^{-1}_{-1}(\mathbb{R}^n_+)$.

On suppose de plus que

(III.15) $\exists\, \gamma > 0$ tel que $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, $|a_{ij}(x)| \geq \gamma$

pour $i = j = (0,\dots,0,1)$

(III.16) $\forall\, \lambda \in \mathbb{N}^n$, $\exists\, C>0$ tel que $|D^\lambda a_{ij}| \leq C (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}}$

On obtient le résultat de régularité suivant :

Théorème III.4

Sous les hypothèses (III.13), (III.14), (III.15), (III.16), pour $k \geq 1$, *l'opérateur* $(A(x,D), \gamma_0)$ *est un isomorphisme topologique de* $W^k_k(\mathbb{R}^n_+)$ *sur* $W^{k-2}_{k-2}(\mathbb{R}^n_+) \times W^{k-\frac{1}{2}}_k(\mathbb{R}^{n-1})$.

Par le théorème II.3, on se ramène au problème de Dirichlet homogène, il suffit donc de démontrer que :

Pour $k \geq 1$, *l'opérateur* $A(x,D)$ *est un isomorphisme de* $W^k_k(\mathbb{R}^n_+) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_1(\mathbb{R}^n)$ *sur* $W^{k-2}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration de cette dernière propriété est analogue à celle du théorème III.1. Nous devons cependant distinguer ici les variables tangentielles de la variable normale.

Nous étudions d'abord le cas k=2 en introduisant le problème tronqué (P_k). A(x,D) est linéaire continu de $W_2^2(\mathbb{R}^n_+) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Réciproquement, nous supposons que $u \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+)$ et $A\,u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, l'analogue du lemme III.1 est immédiat. On montre ensuite :

Lemme III.3

Si $u \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $A\,u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, *il existe une constante* $C>0$ *telle que, quelle que soit la dérivée tangentielle D on ait*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \left|(1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k\right|_{\overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\left\{|Au|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + |u|_{\overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+)}\right\}.$$

Notons d'abord que u_k, à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, est solution du problème :

$$\begin{cases} u_k \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+) \quad (\text{donc } u_k \in H_o^1(\mathbb{R}^n_+)) \\ Au_k = g_k \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \end{cases}$$

D'après les théorèmes de régularité au bord pour les opérateurs elliptiques (voir [11]), on obtient

$$u_k \in H^2(\mathbb{R}^n_+) \cap H_o^1(\mathbb{R}^n_+)$$

et par suite, pour D dérivée tangentielle,

$$(1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+).$$

On a d'autre part

$$A\left((1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k\right) = (1+\rho^2)^{1/2}\, Dg_k + \left[A, (1+\rho^2)^{1/2}\, D\right] u_k$$

et la démonstration du lemme III.3 est ensuite identique à celle du lemme III.2.

On obtient donc, que, pour D dérivée tangentielle

$$(1+\rho^2)^{1/2}\, Du \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+),$$

ce qui implique que, pour i=1,...,n-1, j=1,....n

$$(1+\rho^2)\, D_i\, D_j u \in L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

En reportant ce résultat dans l'équation $Au = f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, par (III.15), on obtient

$$(1+\rho^2)\, D_n^2\, u \in L^2(\mathbb{R}^n_+),$$

ce qui termine la démonstration du théorème pour k=2.

On fait ensuite une récurrence sur k. Supposons que, pour $\ell \leq k-1$, les conditions $u \in W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathring{W}^1_1(\mathbb{R}^n_+)$ et $A\,u \in W^{k-2}_{k-2}(\mathbb{R}^n_+)$ impliquent $u \in W^k_k(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathring{W}^1_1(\mathbb{R}^n_+)$.

Soit maintenant u vérifiant

$$u \in W^k_k(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathring{W}^1_1(\mathbb{R}^n_+)\ ;\ A\,u \in W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+).$$

Alors, pour D dérivée tangentielle, on a

$$(1+\rho^2)^{1/2}\,D\,u \in W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathring{W}^1_1(\mathbb{R}^n_+)\ ;\ A((1+\rho^2)^{1/2}\,Du) \in W^{k-2}_{k-2}(\mathbb{R}^n_+)$$

donc $(1+\rho^2)^{1/2}\,D\,u \in W^k_k(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathring{W}^1_1(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour $|\lambda| = k+1$, $\lambda \neq (0,\ldots,0,k+1)$, on obtient donc

$$(1+\rho^2)^{\frac{k+1}{2}}\,D^\lambda u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

et par $A\,u \in W^{k-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+)$, (III.15), (III.16) on a ensuite

$$(1+\rho^2)^{\frac{k+1}{2}}\,D^{k+1}_n\,u \in L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

Le théorème III.4 se généralise comme le théorème III.1. On pourrait mettre en évidence des opérateurs B(x,D) tels que :

$(B(x,D),\gamma_0)$ réalise un isomorphisme topologique de $W^k_{k+\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n_+) \times W^{k-\frac{1}{2}}_{k+\alpha+\beta}(\mathbb{R}^{n-1})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BARROS NETO - Inhomogeneons boundary value problems in a half space
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 331-365.

[2] V.M. BABICH - Sur le problème du prolongement des fonctions
Uspehi Mat. Nauk 8,2 (1953), 111-113.

[3] J. DENY, J.L. LIONS - Les espaces du type de Beppo Levi
Ann. Inst. Fourier, 5 (1953-54), 305-370.

[4] B. HANOUZET - Espaces de Sobolev avec poids et interpolation
C.R. Acad. Sc. Paris, 271, (1970), 26-29.

[5] G.G. HARDY, D.E. LITTLEWOOD, G. POLYA
Inequalities, Cambridge (1952).

[6] L. HÖRMANDER, J.L. LIONS - Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, Math. Scand., 4 (1956), 259-270.

[7] L.D. KUDRJAVCEV - Imbedding theorems for functions defined on unbounded regions. Soviet Math. Dokl. 4, (1963) 1715-1717.

[8] J.L. LIONS - Théorèmes de traces et d'interpolation (I)
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 349-403.

[9] J.L. LIONS - Théorèmes de traces et d'interpolation (IV)
Math. Annalen, 151 (1963), 42-56.

[10] J.L. LIONS - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Montréal 1962.

[11] J.L. LIONS, E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes.
Paris (1968).

[12] J. NECAS - Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques
Paris (1967).

[13] L. SCHWARTZ - Théorie des distributions Paris (1966).

REGULARITE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES DU DEUXIEME ORDRE.

par

Bernard HANOUZET

On étudie un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux dégénérant sur le bord d'un ouvert Ω relativement compact de $\mathbb{R}^n$, suffisamment régulier ; le bord $\partial\Omega$ de Ω est une variété de dimension n-1, à bord de dimension n-2. On obtient un résultat maximum de régularité quand le second membre est dans $L^2(\Omega)$. Par exemple, en dimension 2, pour $\Omega =]-1, +1[\times]-1, +1[$, on démontre que :

$$A(x,y\,;D) = -\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)(1-y^2)\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left((1-x^2)(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\right) + (1-x^2)(1-y^2)\,I$$

est un isormorphisme de D sur $L^2(\Omega)$ avec $D = \{u \in L^2(\Omega)\ ;$

$$\left[((1-x)^2 + (1-y)^2)((1-y)^2 + (1+x)^2)((1+x)^2 + (1+y)^2)((1+y)^2 + (1-x)^2)\right]^{\frac{1}{2}} u \in H^1(\Omega)$$

$$(1-x^2)(1-y^2)\,u \in H^2(\Omega)\}$$ (1),

muni de sa norme naturelle. Des résultats analogues sont obtenus pour un opérateur différentiel elliptique non dégénéré par M.S. HANNA et K.T. SMITH [4]. Les idées suivent de près celles de M.S. BAOUENDI et Ch. GOULAOUIC [2].

Au I, on introduit un espace de Sobolev avec poids dans un dièdre, cet espace permet d'étudier localement l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$ défini au II. Le problème est posé sous forme variationnelle dans II où l'on donne aussi le résultat principal de régularité ; ce dernier est énoncé sans démonstration dans [5]. Les III et IV sont consacrés à l'étude de la régularité au voisinage d'un point singulier de la frontière de Ω. Le IV traite aussi de façon indépendante la régularité pour un problème dégénéré dans $\mathbb{R}^2_{++} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x > 0,\ y > 0\}$.

Qu'il me soit permis de remercier ici Monsieur Ch. GOULAOUIC pour ses encouragements constants et M. E. MAGENES pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail.

---

(1) $H^s(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev habituel, voir [6] par exemple.

I - Espace $V(\mathbb{R}^n_{++})$

$\mathbb{R}^n_{++}$ désigne le dièdre : $\{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

On note : $x = x_1$, $y = x_2$, $x' = (x_3,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$.

On pose aussi : $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ et si $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$.

Définition 1.1.

On désigne par $V(\mathbb{R}^n_{++})$ *l'espace :*

$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++}) / \sqrt{xy}\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++}) ; |\alpha| \leq 1\}$. Il est immédiat que :

Propriété 1.1.

$V(\mathbb{R}^n_{++})$ *est un espace de Hilbert pour la norme :*

$$|u|_V = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq 1} |\sqrt{xy}\ D^\alpha u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \right\}^{1/2}$$

Les trois propositions qui suivent donnent des propriétés de $V(\mathbb{R}^n_{++})$.

Proposition 1.1.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ *est dense dans* $V(\mathbb{R}^n_{++})$.

La démonstration s'inspire de [3]. Nous en donnons les grandes lignes.

On montre d'abord que l'ensemble des éléments de V à supports compacts dans $\overline{\mathbb{R}^n_{++}}$ est dense dans V, puis que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$ est dense dans V en utilisant les propriétés de $H^1(\mathbb{R}^n_{++})$.

Soit ensuite $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$. On choisit une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2_{++})$ vérifiant : $\psi = 0$ pour $x \leq 1$ ou $y \leq 1$, $\psi = 1$ pour $x \geq 2$ et $y \geq 2$, $0 \leq \psi \leq 1$ et on pose $\psi_p(x,y) = \psi(px, py)$, $u_p = \psi_p u$

On vérifie que $|u_p - u|_V$ reste borné quand p tend vers l'infini, il existe donc une sous-suite $(u_{p_k} - u)$ faiblement convergente dans V. Mais $u_p - u$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ quand p tend vers l'infini. On obtient donc que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ est faiblement dense dans V, donc fortement dense.

Nous utilisons maintenant cette proposition pour démontrer deux résultats d'immersion.

Proposition 1.2.

$V(\mathbb{R}^n_{++})$ *est contenu dans* $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$, *avec injection continue.*

On prend u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ et on montre que :

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \leq \text{Cte } |u|_V .$$

On utilise un passage en coordonnées polaires ; notons que

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(|D_1 u|^2 + |D_2 u|^2)\, dx\, dy\, dx' =$$

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times [0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}} r^3 \sin\theta \cos\theta \,(|D_r u|^2 + \frac{1}{r^2}|D_\theta u|^2)\, dr\, d\theta\, dx'$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} |u|^2\, dx\, dy\, dx' = \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}} r\,|u|^2\, dr\, d\theta\, dx' .$$

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions $\in \mathcal{C}^\infty(0,\frac{\pi}{2})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1 \,,\; 0 \leq \varphi_2 \leq 1 \,,\; \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

$$\text{supp } \varphi_1 \subset [0,\theta_1] \text{ et } \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{supp } \varphi_2 \subset [\theta_2, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \theta_2 > 0.$$

D'après l'inégalité de Hardy (voir [8]) :

$$\int_0^{\pi/2} |\varphi_1 u|^2\, d\theta \leq C \int_0^{\pi/2} \theta^2\, |D_\theta \varphi_1 u|^2\, d\theta \leq C_1 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, |D_\theta \varphi_1 u|^2\, d\theta$$

où C_1 est une constante dépendant de φ_1 (car $\varphi_1 = 0$ pour $\theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

De même :

$$\int_0^{\pi/2} |\varphi_2 u|^2 \, d\theta \leq C_2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, |D_\theta \varphi_2 u|^2 \, d\theta.$$

On obtient donc en notant $R = \mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}$:

$$\int_R r \, |u|^2 \, dr d\theta \, dx'$$

$$\leq C \Big\{ \int_R r \sin\theta \cos\theta \, ((D_\theta \varphi_1)^2 + (D_\theta \varphi_2)^2) \, |u|^2 \, dr d\theta \, dx' \qquad (\alpha)$$

$$+ \int_R r \sin\theta \cos\theta \, |D_\theta \varphi_1 \varphi_2| \, |u \, D_\theta u| \, dr d\theta \, dx' \qquad (\beta)$$

$$+ \int_R r \sin\theta \cos\theta \, (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \, |D_\theta u|^2 \, dr d\theta \, dx' \Big\} \qquad (\gamma)$$

Le terme (β) se majore par l'inégalité de Schwarz :

$$(\beta) \leq C \Big(\int_R r \sin\theta \cos\theta \, |u|^2 \, dr d\theta \, dx' \Big)^{1/2} \Big(\int_R r \sin\theta \cos\theta \, |D_\theta u|^2 \, dr d\theta \, dx' \Big)^{1/2}$$

$$\leq C \Big\{ \int_R r \sin\theta \cos\theta \, |u|^2 \, dr d\theta \, dx' + \int_R r \sin\theta \cos\theta \, |D_\theta u|^2 \, dr d\theta \, dx' \Big\}.$$

ce qui donne deux termes analogues à (α) et (γ).

Le terme (γ) donne de façon immédiate :

$$(\gamma) \leq C \int_{R_+} r \sin\theta \cos\theta \, |D_\theta u|^2 \, dr d\theta \, dx' \qquad (\gamma').$$

Reste le terme (α). Par l'inégalité de Hardy, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} r \, |u|^2 \, dr \leq C \int_0^{+\infty} r^3 |D_r u|^2 \, dr$$

et par suite

$$\int_R r \sin\theta \cos\theta \, |u|^2 \, dr d\theta \, dx' \leq C \int_R r^3 \sin\theta \cos\theta \, |D_r u|^2 \, dr d\theta \, dx'. \qquad (\alpha')$$

Les majorations (α') et (γ') donnent alors :

$$\int_R r \, |u|^2 \, dr d\theta \, dx' \leq C \left\{ \int_R r^3 \sin\theta \cos\theta \, |D_r u|^2 \, dr d\theta \, dx' \right.$$

$$\left. + \int_R r \sin\theta \cos\theta \, |D_\theta u|^2 \, dr d\theta \, dx' \right\}.$$

ce qui d'après les remarques faites au début donne bien :

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \leq C \, |u|_{V(\mathbb{R}^n_{++})}$$

pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$; la proposition 1.1 permet ensuite de conclure.

Nous précisons le résultat de la proposition précédente :

Proposition 1.3.

$V(\mathbb{R}^n_{++})$ *s'injecte continûment dans l'espace :*

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++}) \,/\, (x^2+y^2)^{1/4}\, u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}\ , H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))\}$$

Nous reprenons la démonstration précédente en choisissant φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$.

Partant de :

$$|\varphi_1 u|^2 = -\int_\theta^{\Pi/2} D_\theta |\varphi_1 u(r,t,x')|^2\, dt$$
$$\leq 2 \int_\theta^{\Pi/2} |\varphi_1 u(r,t,x')|\ |D_\theta \varphi_1 u(r,t,x')|\, dt\ ,$$

on obtient, par intégration par parties :

$$\int_0^{\Pi/2} |\varphi_1 u|^2\, d\theta \leq 2\int_0^{\Pi/2} \theta |\varphi_1 u(r,t,x')|\ |D_\theta \varphi_1 u(r,t,x')|\, d\theta$$
$$\leq C_1 \Big(\int_0^{\Pi/2} \sin\theta\cos\theta\ |\varphi_1 u|^2\, d\theta\Big)^{1/2} \Big(\int_0^{\Pi/2} \sin\theta\cos\theta\ |D_\theta \varphi_1 u|^2\, d\theta\Big)^{1/2}$$

(cette dernière inégalité est obtenue grâce au choix du support de φ_1, puis par l'inégalité de Schwarz).

Partant de $|\varphi_2 u|^2 = \int_0^\theta D_\theta |\varphi_2 u|^2\, dt$, on obtient une inégalité analogue, c'est-à-dire que l'on a pour $i = 1,2$:

$$\int_0^{\Pi/2} |\varphi_i u|^2\, d\theta \leq C_i \Big(\int_0^{\Pi/2} \sin\theta\cos\theta |\varphi_i u|^2\, d\theta\Big)^{1/2} \times \Big(\int_0^{\Pi/2} \sin\theta\cos\theta\ |D_\theta \varphi_i u|^2\, d\theta\Big)^{1/2}.$$

Nous notons $\hat{u}(x,y,\xi)$ la transformée de Fourier de u suivant les variables $(x_3,\ldots,x_n)$; $(\xi_3,\ldots,\xi_n) = \xi$ désigne la variable duale. La dernière inégalité se conserve en remplaçant u par $\hat{u}$.

Nous avons d'autre part :

$$|(x^2+y^2)^{1/4}\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} = \int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\hat{u}(x,y,\xi)|^2 dxdy\, d\xi$$

$$= \int_R r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\hat{u}(r,\theta,\xi)|^2\, dr d\theta\, d\xi\ .$$

Des inégalités :

$$\int_0^{\pi/2} r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\varphi_i \hat{u}|^2\, d\theta$$

$$\leq C_i\Big(\int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta\cos\theta(1+|\xi|^2)|\varphi_i\hat{u}|^2\, d\theta\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{\pi/2} r\sin\theta\cos\theta\, |D_\theta\varphi_i\hat{u}|^2\, d\theta\Big)^{1/2}$$

$$\leq C_i'\Big\{\int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta\cos\theta(1+|\xi|^2)|\varphi_i\hat{u}|^2\, d\theta + \int_0^{\pi/2} r\sin\theta\cos\theta\, |D_\theta\varphi_i\hat{u}|^2\, d\theta\Big\}.$$

on tire ensuite :

$$\int_0^{\pi/2} r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\hat{u}|^2\, d\theta$$

$$\leq C\Big\{\int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta\cos\theta\,(1+|\xi|^2)\,|\hat{u}|^2\, d\theta$$

$$+ \int_0^{\pi/2} r\sin\theta\cos\theta\, |D_\theta\varphi_1\hat{u}|^2\, d\theta + \int_0^{\pi/2} r\sin\theta\cos\theta |D_\theta\varphi_2 u|^2\, d\theta\Big\}.$$

Après intégration sur R les deux derniers termes se majorent comme à la

proposition 1.2 et on obtient en définitive :

$$\int_R r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}|\hat{u}|^2\, dr d\theta\, d\xi \leq C\Big\{\int_R r^3 \sin\theta\cos\theta(1+|\xi|^2)|\hat{u}|^2\, dr d\theta\, d\xi$$

$$+\int_R r^3 \sin\theta\cos\theta\,|D_r\hat{u}|^2\, dr d\theta\, d\xi + \int_R r\sin\theta\cos\theta\,|D_\theta\hat{u}|^2\, dr d\theta\, d\xi\Big\}.$$

En revenant aux variables : (x,y,ξ) cette dernière inégalité s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{1/2}\,|\hat{u}|^2\, dx\, dy\, d\xi$$

$$\leq C\Big\{\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)|\hat{u}|^2\, dxdy\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(|D_1\hat{u}|^2+|D_2\hat{u}|^2)dxdy\, d\xi\Big\}.$$

donc on a bien :

$$|(x^2+y^2)^{1/4}u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C\,|u|_V .$$

Nous préparons maintenant l'étude de la régularité en démontrant deux lemmes de commutation voisins de ceux donnés dans [2]. On introduit l'opérateur T_r : si $u(x,y,x') \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ et est tempérée en x', on note $\hat{u}(x,y,\xi)$ la transformée de Fourier en x' et on définit T_r par :

$$\widehat{T_r u}(x,y,\xi) = (1+|\xi|^2)^{r/2}\,\hat{u}(x,y,\xi).$$

On démontre (voir [7]) les :

Propriétés 1.2.

i) $u \longrightarrow T_r u$ est linéaire continue de

$L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^s(\mathbb{R}^{n-2}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^{s-r}(\mathbb{R}^{n-2}))$

ii) si $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ alors $u \longrightarrow [a, T_r] u$ (2) est linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^s(\mathbb{R}^{n-2}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^{s-r+1}(\mathbb{R}^{n-2}))$.

Soient maintenant deux fonctions ζ, $\beta \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$, ζ et β à valeurs réelles, et on pose :

$$M = (x^2+y^2)^{1/4} \beta T_{1/2} \zeta$$

Alors l'adjoint formel M^* de M est :

$$M^* = (x^2+y^2)^{1/4} \zeta T_{1/2} \beta$$

On donne ensuite $a \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$ et P, Q deux opérateurs différentiels en toutes les variables d'ordre inférieur ou égal à 1 et à coefficients $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$ tels que :

$$\forall\, r \quad : \quad [Q, T_r] = [P, T_r] = 0.$$

Nous noterons dans la suite :

$(\, , \,)_s$ et $| \, |_s$ le produit scalaire et la norme dans $H^s(\mathbb{R}^n_{++})$. On démontre alors le :

Lemme 1.1.

Pour tout v *dans* $H^1_0 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$|(aP\,Mv, Q\,M\,v)_0 - (a\,P\,v, Q\,M^*\,M\,v)_0| \leq C|v|_1 \, |Mv|_1.$$

(2) $[a, T_r]$ désigne le commutateur de a et T_r.

Remarquons que $v \in H_0^1 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ donne un sens aux termes intervenant dans l'inégalité : (c'est " juste suffisant" pour $Q\, M^*\, M\, v$).

Nous partons de :

$$(aP\, M\, v, Q\, M\, v)_0 - (a\, P\, v, Q\, M^*\, M\, v)_0 = ([aP,M]\, v, Q\, M\, v)_0 - (A\, P\, v, [Q,M^*]\, M\, v)_0$$

et nous étudions le premier terme de droite :

$$|([aP,M]\, v, Q\, M\, v)_0| \leq |[a\, P,M]\, v|_0\ |Q\, M\, v|_0$$

d'après l'inégalité de Schwarz et d'autre part :

$$|Q\, M\, v|_0 \leq C|M\, v|_1.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$|[a\, P,M]\ v|_0 \leq C|v|_1.$$

Pour cela, nous explicitons $[a\, P,M]$ et majorons séparément chacun des termes obtenus.

$$[a,P,M] = a\beta[P,(x^2+y^2)^{1/4}]\ T_{1/2\zeta}$$

$$+ a(x^2+y^2)^{1/4}\ [P,\beta]\ T\tfrac{1}{2}\zeta + a(x^2+y^2)^{1/4}\ \beta\ T_{1/2}[P,\zeta]$$

$$+ (x^2+y^2)^{1/4}\ \beta[a,T_{1/2}]\zeta\ P.$$

Pour les trois derniers termes, puisque a et $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$, on a :

$|\quad|_0 \leq C|v|_1$. En effet pour le deuxième :

$$|a(x^2+y^2)^{1/4}\ [P,\beta]\ T_{1/2\zeta}\ v|_0 \leq C\ |T_{1/2\zeta}\ v|_0$$

$$\leq C\ |\zeta\ v|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++},H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C|v|_1$$

Le calcul est identique pour le troisième terme ; pour le quatrième, en utilisant la propriété 1.2,ii, on obtient :

$$|x^2+y^2)^{1/4}\beta[a,T_{1/2}]\zeta\ P|_0 \leq C|[a,T_{1/2}]\zeta\ P\ v|_0$$

$$\leq C\ |\zeta\ P\ v|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C|P\ v|_0 \leq C|v|_1\ .$$

Le premier terme, en posant $P = \sum_{i=0}^{n} p_i\ D_i$, se présente sous la forme :

$$a\ \beta\ p_1\ \frac{1}{2}\ x(x^2+y^2)^{-3/4}\ T_{1/2}\zeta + a\ \beta\ p_2\ \ \frac{1}{2}\ y(x^2+y^2)^{-3/4}\ T_{1/2}\ \zeta$$

et on a alors la majoration :-

$$|a\ \beta[P,(x^2+y^2)^{1/4}]\ T_{1/2}\zeta\ v|_0 \leq C|(x^2+y^2)^{-1/4}\ T_{1/2}\zeta\ v|_0$$

car $$x(x^2+y^2)^{-3/4} \leq (x^2+y^2)^{-1/4}\ .$$

L'utilisation de la propriété :

Propriété 1.3.

Il existe une constante $C > 0$ telle que , $\forall\ v \in H_0^1(\mathbb{R}^n_{++})$, on a :

$$|(x^2+y^2)^{-1/4}\ T_{1/2}v|_0 \leq C|v|_1\ .$$

permet alors de conclure à :

$$|[a\ P,M]v|_0 \leq C|v|_1.$$

On traite ensuite de la même manière :

$$(a\ P\ v\ ,[Q,M^*]M\ v)_0$$

En remplaçant Q par a P, M^* par M on montre que $[Q,M^*]$ est linéaire continu de $H^1(\mathbb{R}^n_{++})$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ donc

$$|(a\ P\ v,[Q,M^*]M\ v)_0| \leq C|v|_1|M\ v|_1 .$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.1.

Reste à vérifier la propriété 1.3 :

Pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$, on a, après un passage en coordonnées polaires :

$$\int_0^{+\infty} |\hat{v}|^2\, dr \leq C \int_0^{+\infty} r|\hat{v}|D_r\,\hat{v}|dr$$

$$\leq C\Big(\int_0^{+\infty} r|D_r\hat{v}|^2\, dr\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{+\infty} r|\hat{v}|^2\, dr\Big)^{1/2}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{-1/2}\,|T_{1/2}v|^2\, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{-1/2}(1+|\xi|^2)^{1/2}|\hat{v}(x,y,\xi)|^2\, dx\, dy\, d\xi =$$

$$\int_{R^{n-2}} (1+|\xi|^2)^{1/2}\, d\xi \int_{\mathbb{R}_+\times[0,\frac{\pi}{2}]} |\hat{v}(x,y,\xi)|^2\, drd\theta \leq$$

$$C\int_{R^{n-2}} d\xi\Big(\int_{\mathbb{R}_+\times[0,\frac{\pi}{2}]} r|D_r\hat{v}|^2\, drd\theta\Big)^{1/2}\Big(\int_{R_+\times(0,\frac{\pi}{2})} r(1+|\xi|^2)|\hat{v}|^2\, drd\theta\Big)^{1/2} \leq$$

$$C\Big\{\int_R r|D_r\hat{v}|^2\, drd\theta\, d\xi + \int_R r(1+|\xi|^2)\,|\hat{v}|^2\, drd\theta\Big\} \leq$$

$$C\,|v|_1$$

ce qui fournit la conclusion en tenant compte de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ dans $H'_0(\mathbb{R}^n_{++})$. ▨

Lemme 1.2.

Il existe une constante $C > 0$ *telle que, pour tout* $v \in H'_0 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *à support dans un compact fixe de* $\overline{\mathbb{R}^n_{++}}$, *on ait :*

$$|(a\ xy\ P\ M\ v, Q\ M\ v)_0 - (a\ xy\ P\ v, Q\ M^*\ M\ v)_0| \leq C\ |v|_V\ |M\ v|_V .$$

Remarquons que les expressions intervenant dans le premier membre de l'inégalité ne changent pas quand on remplace v par $\beta_1 v$ avec $\beta_1\ \zeta = \zeta$, β_1 dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$. Il est utile de supposer v à support compact pour assurer que $v \in H'_0 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ entraîne $v \in V(\mathbb{R}^n_{++})$.

Nous procédons comme au lemme 1.1 ; il est aussi utile de noter que $[xy, M] = 0$.

Partant de :

$$(a\ xy\ P\ M\ v, Q\ M\ v)_0 - (axy\ P\ v, Q\ M^*\ M\ v)_0 =$$

$$= (\sqrt{xy}\ [a\ P, \bar{M}]\ v, \sqrt{xy}\ Q\ M\ v)_0 - (a\ \sqrt{xy}\ P\ v,\ \sqrt{xy}\ [Q, M^*]\ M\ v)_0$$

on obtient le lemme en majorant séparément les deux derniers termes. Nous n'étudions que le premier ; il suffit de montrer que :

$$|\sqrt{xy}\ [a\ P, \bar{M}]\ v|_0 \leq C|v|_V .$$

Nous avons :

$$\sqrt{xy}\,[a\,P,\bar{M}] = \sqrt{xy}\,[P,(x^2+y^2)^{1/4}]\,T_{1/2}\zeta$$
$$+ \sqrt{xy}\,a(x^2+y^2)^{1/4}\,[P,\beta]\,T_{1/2}\zeta + \sqrt{xy}\,a(x^2+y^2)^{1/4}\,\beta\,T_{1/2}[P,\zeta]$$
$$+ \sqrt{xy}(x^2+y^2)^{1/4}\,\beta[a,T_{1/2}]\zeta P.$$

La proposition 1.3 permet de majorer les 3 premiers termes :

Pour le premier :

$$|a\,\beta\,p_1\,\frac{1}{2}\sqrt{xy}\,x(x^2+y^2)^{-3/4}\,T_{1/2}\zeta\,v|_0$$
$$\leq C\,(x^2+y^2)^{1/4}\,T_{1/2}\zeta\,v|_0$$
$$\leq C\,|\zeta v|_V \leq C|v|_V.$$

Le deuxième et troisième sont immédiats. Reste :

$$|\sqrt{xy}\,(x^2+y^2)^{1/4}\beta[a,T_{1/2}]\zeta\,P\,v|_0$$
$$= |\beta[a,T_{1/2}](x^2+y^2)^{1/4}\,\sqrt{xy}\,\zeta\,P\,v|_0$$
$$\leq C\,|\sqrt{xy}\,\zeta\,P\,v|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))}$$

(d'après la propriété 1.2, ii)

$$\leq C|\sqrt{xy}\,P\,v|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \leq C\,|v|_V .$$

On termine ensuite la démonstration comme au lemme précédent.

Nous rappelons maintenant quelques propriétés d'espaces utiles pour la suite.

Désignons par $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace :

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}.$$

Nous introduisons comme dans [2] l'espace :

$$U(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \,/\, \sqrt{x_1}\, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)\ ;\ |\alpha| \leq 1\}.$$

$U(\mathbb{R}^n_+)$ est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme :

$$|u|_U = \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} |\sqrt{x_1}\, D^\alpha u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \Big)^{1/2}$$

et on a les propriétés :

Propriété 1.1'.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $U(\mathbb{R}^n_+)$.

Propriétés 1.2'.

On a l'inclusion topologique :

$$U \subset L^2(\mathbb{R}_+, H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

II - Espace $\mathcal{V}(\Omega)$. Problème variationnel.

On donne p fonctions réelles $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et on suppose qu'un ouvert borné Ω est défini par :

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi_i(X) > 0 \ ; \ i = 1,\ldots,p\}.$$

On pose $\Phi = \prod_{i=1}^{p} \varphi_i$ et on suppose que :

i) Pour tout point régulier X de $\partial\Omega$, il existe un indice i tel que :

$$\varphi_i(X) = 0 \text{ et } \varphi_j \neq 0,\ j \neq i,\ j = 1,\ldots,p \qquad (2.1)$$

et $d\Phi(X) \neq 0$.

(cette dernière condition équivaut à $d\ \varphi_i(X) \neq 0$).

ii) Pour tout point singulier A de $\partial\Omega$ il existe un couple d'indices (i,j) tel que :

$$\begin{cases} \varphi_i(A) = \varphi_j(A) = 0 \\ \varphi_k(A) \neq 0 \ , \ k \neq i,\ k \neq j,\ k = 1,\ldots,p \\ \text{grad } \varphi_i(A) \wedge \text{grad } \varphi_j(A) \neq 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Nous introduisons l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$ par :

Définition 2.1.

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ / \ \Phi^{1/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ ; \ |\alpha| \leq 1\}.$$

et on a immédiatement :

$\mathcal{V}(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme :

$$|u|_{\mathcal{V}} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq 1} |\Phi^{1/2} D^{\alpha} u|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

Nous utiliserons dans la suite les :

Propriétés 2.1.

1°) $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu dans $H^1_{loc}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

2°) Si Ψ est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'application :

$$u \longrightarrow \Psi u$$

est continue de $\mathcal{V}(\Omega)$ dans lui-même .

3°) Pour que u appartienne à $\mathcal{V}$ il faut et il suffit que les trois propriétés suivantes soient réalisées :

i) $u \in H^1_{loc}(\Omega)$.

ii) pour X point régulier de $\partial\Omega$, il existe un ouvert O voisinage de X et un difféomorphisme θ de O sur O' (O' boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, centrée à l'origine) vérifiant :

$$\theta(O \cap \overline{\Omega}) = O' \cap \mathbb{R}^n_+$$

$$\theta(O \cap \partial\Omega) = O' \cap \partial\mathbb{R}^n_+$$

et tels que, pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$, on ait :

$$(\zeta u) \circ \theta^{-1} \in U(\mathbb{R}^n_+).$$

iii) Pour X point singulier de $\partial\Omega$, il existe un ouvert O voisinage de X et un difféomorphisme de O sur O' vérifiant :

$$\theta(O \cap \overline{\Omega}) = O' \cap \mathbb{R}^n_{++}$$

$$\theta(O \cap \partial\Omega) = O' \cap \partial\mathbb{R}^n_{++}$$

et tels que, pour toute $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ on ait :

$$(\zeta u) \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++}).$$

4°) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

5°) $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu algébriquement et topologiquement dans $L^2(\Omega)$.

Tirons deux conséquences avant de démontrer ces propriétés :

Conséquences 2.1.

1°) Le dual $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ est un espace de distributions.

2°) Puisque Ω est un ouvert borné, la norme :

$$|u| = \left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} |\phi^{1/2} D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme $\mathcal{V}$.

Démonstration.

1° et 2° sont immédiats ; remarquons que, pour 2°, il suffirait de prendre $\Psi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Le 3° se démontre par partition de l'unité.

Soit X point régulier de $\partial\Omega$, tel que $\varphi_1(X) = 0$; on peut prendre

dans un voisinage :

$$\Theta \begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x) \\ x'_i = \theta_i(x) \qquad i = 1,\dots,n \end{cases}$$

et on a $\zeta u \circ \Theta^{-1} \in U(\mathbb{R}^n_+)$ pour $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$.

Pour A point singulier de $\partial\Omega$, tel que $\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = 0$ on peut prendre

$$\Theta \begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x) \\ x'_2 = \varphi_2(x) \\ x'_i = \theta_i(x) \qquad i = 3,\dots,n. \end{cases}$$

et on a $\zeta u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$ pour $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$.

Les hypothèses (2.1) et (2.2) permettent en effet ce choix. Le 4° s'obtient ensuite à partir des propriétés 1.1, et 1.1' et le 5° à partir des propriétés 1.2 et 1.2'.

Problème variationnel.

On considère la forme intégro-différentielle a définie par :

$$a(u,v) = \sum_{\substack{0 \le |\alpha| \le 1 \\ 0 \le |\beta| \le 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(X)\, \Phi(X)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dX$$

avec $a_{\alpha\beta}$ dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

La forme a est donc continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. On suppose de plus que a est $\mathcal{V}$-coercitive, c'est-à-dire :

$$\exists\ \gamma > 0 \text{ tel que } \forall\ u \in \mathcal{V} \qquad \mathrm{Re}\, a(u,u) \ge \gamma |u|^2_{\mathcal{V}}$$

On associe à a l'opérateur différentiel A = A(X,D) :

$$A = \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq 1 \\ 0 \leq |\beta| \leq 1}} D^{\beta} a_{\alpha\beta}(X) \Phi(X) D^{\alpha}$$

L'application du lemme de Lax Milgramm donne alors la :

Proposition 2.1.

Pour tout $f \in \mathcal{V}'(\Omega)$, *il existe* u *dans* $\mathcal{V}(\Omega)$ *unique, tel que :*

$$a(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \qquad (2.3)$$

ou encore

A *est un isomorphisme de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathcal{V}'$.

Donc pour tout f dans $\mathcal{V}'(\Omega)$ il existe u dans $\mathcal{V}(\Omega)$, unique, telle que Au = f. On suppose maintenant que u est dans un espace "plus petit" que $\mathcal{V}'(\Omega)$, on cherche alors dans quel espace se trouve la solution u.

On obtient le résultat maximal quand f est dans $L^2(\Omega)$.

Régularité avec second membre dans $L^2(\Omega)$.

On suppose que a possède la propriété d'ellipticité :

$\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall\, \xi \in \mathbb{C}^n$ et $\forall\, x \in \overline{\Omega}$:

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = 1} a_{\alpha\beta}(X)\, \xi^{\alpha}\, \overline{\xi}^{\beta} \geq \delta |\xi|^2 \qquad (2.4)$$

et on pose :

$\Psi = \Pi(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}$, le produit Π étant étendu aux couples (i,j) définis en (2.2). On introduit ensuite :

Définition 2.2.

$$D = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Psi u \in H'(\Omega) \; ; \; \Phi u \in H^2(\Omega)\} .$$

D est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_D = \left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + |\Psi u|_{H'(\Omega)} + |\Phi u|_{H^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour la commodité des démonstrations, nous donnons une définition équivalente de l'espace D.

Définition 2.2'.

$$D = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Psi D^\alpha u \in L^2(\Omega) \; ; \; |\alpha| = 1 \; ; \; \Phi D^\alpha u \in L^2(\Omega) \; ; \; |\alpha| = 2\}$$

L'équivalence des deux définitions s'obtient par des calculs élémentaires.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

Théorème 1.

Si f est dans $L^2(\Omega)$, *la solution* u *du problème :*

$$a(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \qquad (2.3)$$

est dans D.

ou encore :

L'opérateur A *est un isomorphisme topologique de* D *sur* $L^2(\Omega)$.

Démonstration :

1°) Il est immédiat que A est un opérateur linéaire continu de D dans $L^2(\Omega)$.

2°) Réciproquement nous allons démontrer que si $u \in \mathcal{V}$ et $A(X,D)\, u \in L^2(\Omega)$ alors u est dans D(A).

Le théorème sera alors une conséquence du théorème de Banach. Nous faisons une étude locale en distinguant les points intérieurs, les points réguliers et les points singuliers du bord.

a) Régularité intérieure :

Soit Ω' un ouvert contenu ainsi que son adhérence dans Ω. Puisque A est elliptique sur Ω', on a :

pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega')$, $\zeta\, u \in H^2(\Omega)$.

b) Régularité au bord - cas d'un point régulier.

Soit par exemple X un point régulier de la portion de $\partial\Omega$ défini par $\varphi_1(X) = 0$. Si O est un ouvert convenable voisinage du point X, on a, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \zeta\, u \in H^1(O \cap \overline{\Omega}) \\ \varphi_1\, \zeta\, u \in H^2(O \cap \overline{\Omega}). \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans [2].

c) Régularité au bord - cas d'un point singulier.

Soient $(i,j) \in I$ et X un point de $\partial\Omega$ défini par $\varphi_i(X) = \varphi_j(X) = 0$. Pour O ouvert convenable voisinage de X, on a, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$:

$$(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \bar{\Omega}) \; ; \; |\alpha| = 1$$

$$\varphi_i \varphi_j\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \bar{\Omega}) \qquad ; \; |\alpha| = 2$$

Ce résultat sera démontré par la suite (voir les propositions 3.3 et 4.6)

Ecrivons de nouveau les résultats a - b - c en introduisant les fonctions Ψ et Φ.

a) $\zeta\, u \in L^2(\Omega')$

$|\alpha| = 1$ $\quad \Psi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(\Omega')$ $\quad$ car $C_1 \leq \Psi \leq C_2$ sur Ω'

$|\alpha| = 2$ $\quad \Phi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(\Omega')$ $\quad$ car $C_1 \leq \Phi \leq C_2$ sur Ω'

b) $\zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$

$|\alpha| = 1$ $\quad \Psi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$, $\quad$ car $C_1 \leq \Psi \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

$|\alpha| = 2$ $\quad \Phi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \dfrac{\Phi}{\varphi_1} \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

c) $\zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$

$|\alpha| = 1$ $\quad \Psi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \dfrac{\Psi}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}} \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

$|\alpha| = 2$ $\quad \Phi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \dfrac{\Phi}{\varphi_i\, \varphi_j} \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

A l'aide d'une partition de l'unité convenable, on obtient donc :

$$u \in L^2(\Omega) \; ; \; \Psi\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 1 \; ;$$

$$\Phi\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 2$$

ce qui montre que $u \in D$ et termine la démonstration.

III - Régularité - Cas des variables tangentielles.

Supposons qu'un point singulier A de $\partial\Omega$ est tel que :

$$\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = 0 \text{ (donc } \varphi_i(A) \neq 0,\ i \geq 3).$$

Si O est un ouvert convenable voisinage de A, on peut définir un difféomorphisme Θ de $O \cap \Omega$ sur $O' \cap \mathbb{R}^n_{++}$ par :

$$\begin{cases} x = \varphi_1(X) \\ y = \varphi_2(X) \\ x'_i = \Theta_i(X) \qquad i = 3,\dots,n \end{cases}$$

et, si $u \in \mathcal{V}(\Omega)$, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ on a : $(\zeta\ u) \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$.
Pour simplifier nous notons aussi ζ u la fonction $(\zeta u) \circ \Theta^{-1}$ ainsi que son prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n_{++}$ dans tous les cas où il n'y a pas ambiguité.
On démontre maintenant la :

Proposition 3.1.

Si $f \in L^2(\Omega)$, *la solution du problème* (2.3) *vérifie :*

$$(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}\zeta u \in V(\mathbb{R}^n_{++})$$

Nous tirons immédiatement la conséquence

$$(x^2+y^2)^{1/2}\ D\,\zeta\,u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

avec $D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'_i}$, *dérivée tangentielle quelconque*

On utilise comme dans [1] une régularisation elliptique. On a l'inclusion

algébrique et topologique :

$$H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V}(\Omega)$$

et $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$, donc $\mathcal{V}'(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Soit ε_j une suite de nombres positifs de limite 0 ; on définit la forme intégro différentielle régularisée a_j par :

$$a_j(u,v) = a(u,v) + \varepsilon_j (u,v)_1$$

Les formes a_j sont continues sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$-coercitives. Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution u_j du problème variationnel régularisé :

$$a_j(u,v) = (f,v)_0 \text{ pour tout } v \text{ dans } (\Omega)$$

appartient à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (voir [4])

et les deux expressions :

$$\sqrt{\varepsilon_j} \quad |u_j|_{H^1(\Omega)} \quad ; \quad |u_j|_{\mathcal{V}(\Omega)} \qquad (3.1)$$

restent bornées quand j varie.

Nous savons aussi que :

la solution u est limite faible dans $\mathcal{V}$ d'une sous-suite extraite de la suite (u_j).

On se donne ζ et β dans $\mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ et à valeurs réelles telles que $\beta\,\zeta = \zeta$ et on pose comme au I :

$$M = (x^2+y^2)^{1/4}\ \beta\ T_{1/2}\zeta.$$

$M\,u_j$ se lit dans l'ouvert Ω :

$$(\varphi_1^2+\varphi_2^2)^{1/4}\,\beta\,(T_{1/2}(\zeta\,u_j\circ\Theta^{-1}))\circ\Theta$$

ce qui donne un sens aux expressions :

$$A_j = a_j(M\,u_j, M\,u_j)$$
$$B_j = a_j(u_j, M^*M\,u_j)$$

Nous démontrons le :

Lemme 3.1.

$|M\,u_j|_V$ *reste borné quand* j *varie.*

Puisque la forme a est $\mathcal{V}$-coercitive nous tirons :

$$|A_j| \geq \gamma|M\,u_j|_V^2 + \varepsilon_j\,|M\,u_j|_1^2$$

Nous obtenons une majoration de $|B_j|$ en écrivant que u_j est solution du problème régularisé :

$$|B_j| \leq |f|_o\,|M^*M\,u_j|_o$$

et d'autre part ,

$$|M^*M\,u_j|_o \leq C|(x^2+y^2)^{1/4}\,M\,u_j|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++},H^{1/2}(R^{n-2})}$$

$$\leq C|M\,u_j|_{V(\mathbb{R}^n_{++})}$$

L'utilisation des lemmes 1.1 et 1.2 fournit une majoration de $|A_j-B_j|$:

$$|A_j-B_j| \leq C(\varepsilon_j|u_j|_1\,|M\,u_j|_1 + |u_j|_V\,|M\,u_j|_V)$$

et par (3.1) :

$$|A_j - B_j| \leq C(\sqrt{\varepsilon_j}\ |M\ u_j|_1 + |M\ u_j|_V)$$

En rassemblant les trois inégalités précédentes, l'inégalité :

$$|A_j| \leq |B_j| + |A_j - B_j|$$

fournit :

$$\varepsilon_j |M\ u_j|_1^2 + \gamma |M\ u_j|_V^2 \leq C(\sqrt{\varepsilon_j}\ |M\ u_j|_1 + |M\ u_j|_V)$$

qui montre que les deux expressions :

$$\sqrt{\varepsilon_j}|M\ u_j|_1 \text{ et } |M\ u_j|_V$$

restent bornées quand j varie.

Terminons maintenant la démonstration de la proposition 3.1. Puisque la boule unité de V est faiblement compacte, on peut extraire de la suite u_j une suite telle que :

$M\ u_j$ converge faiblement vers v quand j tend vers l'infini. Mais, d'autre part, u_j converge faiblement vers u dans V, donc $M\ u_j$ converge faiblement vers M u dans L^2. On en déduit alors que :

$$M\ u = v \in V.$$

D'après le choix de β on a ensuite :

$$(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}\zeta\ u = (x^2+y^2)^{1/4}\ \beta\ T_{1/2}\zeta\ u + (x^2+y^2)^{1/4}\ [\beta, T_{1/2}]\zeta\ u.$$

Il suffit donc de vérifier que le dernier terme est aussi dans V, soit encore que :

$$(x^2+y^2)^{1/4}\, T_{-1/2}\, \zeta\, u \in V$$

puisque $[\beta, T_{1/2}]$ est tangentiel d'ordre $-\frac{1}{2}$.

La dernière propriété tient au fait que, pour les variables tangentielles :

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(x^2+y^2)^{1/4}\,(1+|\xi|^2)^{1/2}\,|\widehat{\zeta u}|^2\,dxdy\,d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)\,|\widehat{\zeta u}|^2\,dx\,dy\,d\xi \leq C\,|\zeta u|_V$$

et pour les variables normales :

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)^{-1/2}\,|D_x(x^2+y^2)^{+1/4}\,\widehat{\zeta u}|^2\,dxdy\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy\,\frac{x^2}{4(x^2+y^2)^{-3/2}}\,(1+|\xi|^2)^{-1/2}|\widehat{\zeta u}|^2\,dx\,dy\,d\xi$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(x^2+y^2)^{1/4}\,(1+|\xi|^2)^{-1/2}\,|D_x\,\widehat{\zeta u}|^2\,dxdy\,d\xi$$

$$\leq C\,|\zeta u|_V$$

Notons que les constantes intervenant ici ne dépendent pas de u mais dépendent du support de ζ.

Nous utilisons maintenant une méthode de différences finies pour gagner un "cran" de régularité.

Proposition 3.2.

Si $f \in L^2(\Omega)$, *la solution du problème (2.3) vérifie :*

$\sqrt{xy}\, D(\zeta u) \in V(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* D *dérivée tangentielle.*

Remarquons tout d'abord que u dans $\mathcal{V}(\Omega)$ et A u dans $L^2(\Omega)$ entraînent $A(\zeta u) \in L^2(\Omega)$; en effet :

$$A(\zeta u) = \zeta Au + [A,\zeta]u \text{ et :}$$

$$[A,\zeta]u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\beta|\leq 1}} (D^\beta a_{\alpha\beta} \Phi D^\alpha \zeta u - \zeta D^\beta a_{\alpha\beta} \Phi D^\alpha u)$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\beta|\leq 1}} (D^\beta a_{\alpha\beta} \Phi (D^\alpha \zeta)u + (D^\beta \zeta) a_{\alpha\beta} \Phi D^\alpha u)$$

appartient à $L^2(\Omega)$ puisque u est dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

Dans la suite, nous posons, pour simplifier les notations :

$$\zeta u = v$$

$$g = \zeta Au + [A,\zeta]u$$

Nous avons donc :

$$Av = g \text{ avec } v \in \mathcal{V}(\Omega)$$

$$g \in L^2(\Omega) \text{ ; supp } g \subset \text{supp } \zeta$$

Soit τ_h un opérateur de translation tangentiel, c'est-à-dire suivant l'une des variables $x'_3,\ldots,x'_n$ de R^n_{++} :

- si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ on a :

$$(\tau_h \varphi)(X) = \varphi(x,y,x'_3,\ldots,x'_i+h,\ldots,x'_n)$$

- si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ on définit $\tau_h T$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \ , \ \langle \tau_h T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle T, \tau_{-h} \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

Nous choisissons h_o tel que, pour $|h| < h_o$, les fonctions intervenant dans la suite garde leur support dans $O' \cap \overline{\mathbb{R}^n_{++}}$ et nous montrons le :

Lemme 3.2.

Pour $h \neq 0$, $|h| < h_o$, $\sqrt{xy}\, \dfrac{\tau_h v - v}{h}$ *est dans* $V(\mathbb{R}^n_{++})$

Puisque $v = \widetilde{(\zeta\, u) \circ \theta^{-1}}$ est à support compact dans $\mathbb{R}^n_{++}$, on a :

$\sqrt{xy}\ (\sqrt{xy}\ v) \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$

$\sqrt{xy}\ D(\sqrt{xy}\ v) = xy\ D\ v \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ pour D dérivée tangentielle

$\sqrt{xy}\ D_x(\sqrt{xy}\ v) = xy\ D_x\ v + \dfrac{y}{2}\ v \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$

et d'après le choix de h_o on a les mêmes propriétés pour $\tau_h v$, d'où le lemme.

Dans $\overline{\Omega} \cap O$, $\tau_h v$ désigne le prolongement par zéro hors de $\overline{\Omega} \cap O$ de $(\tau_h \widetilde{v \circ \theta^{-1}}) \circ \theta$, on a alors :

$\sqrt{xy}\ \dfrac{\tau_h v - v}{h}$ est dans $\mathcal{V}(\Omega)$, et puisque A est un isomorphisme de (Ω) sur $\mathcal{V}(\Omega)$:

$$\left| \sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h} \right|_{\mathcal{V}(\Omega)} \leq C \left| A\left(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h} \right) \right|_{\mathcal{V}'(\Omega)}$$

ce qui donne dans $\overline{\mathbb{R}^n_{++}} \cap O'$:

$$\left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h}\right|_{V(\mathbb{R}^n_{++})} \leq C \left|A'\left(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h}\right|\right.\ _{V'(\mathbb{R}^n_{++})}$$

avec :

$$A' = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} D^j\, a'_{ij}(x,y,x')\ xy\ D^i$$

(pour définir les coefficients a'_{ij} on remplace $a_{\alpha\beta}$ par $\chi\, a_{\alpha\beta}$ avec supp $\chi \subset O$ et $\chi\, \zeta = \zeta$).

Supposons démontré pour l'instant que :

$$\left|A'\left(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h}\right|\right.\ _{V'(\mathbb{R}^n_{++})} \text{ reste borné pour } h \neq 0,\ |h| \leq h_o.$$

Puisque $V(\mathbb{R}^n_{++})$ est un espace de Hilbert, la boule unité de $V(\mathbb{R}^n_{++})$ est faiblement compacte et il existe donc une suite h_n de limite zéro, $|h_n| \leq h_o$, telle que :

$$xy\,\frac{\tau_{h_n} v - v}{h_n} \text{ converge faiblement vers } w \in V(\mathbb{R}^n_{++}).$$

Mais, d'autre part, $\sqrt{xy}\,\frac{\tau_h v - v}{h}$ tend vers $\sqrt{xy}\ D\ v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ quand h tend vers zéro. On déduit donc :

$$\sqrt{xy}\ D(\zeta\, u) \in V(\mathbb{R}^n_{++}) \text{ donc la proposition 3.2.}$$

Il reste à démontrer que :

$$\left|A'\left(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h}\right|\right.\ _{V'(\mathbb{R}^n_{++})} \text{ reste borné pour } h \neq 0,\ |h| < h_o.$$

Nous introduisons :

$$\tau_h A' = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} D^j(\tau_h a'_{ij})\ xy\ D^i$$

et on a :

$$A'\left(\sqrt{xy}\,\frac{\tau_h v - v}{h}\right) = h^{-1}(A' - \tau_h A')\,(\sqrt{xy}\,\tau_h v) +$$

$$+ h^{-1}\sqrt{xy}\,(\tau_h A'\,\tau_h v - A'\,v) + h^{-1}\,[\tau_h A', \sqrt{xy}\,](\tau_h v - v)$$

$$+ h^{-1}\,[\tau_h A' - A', \sqrt{xy}\,]\,v$$

Nous majorons séparément chacun des termes de cette expression dans les quatre lemmes qui suivent. Dans ces quatre lemmes, la notation sup signifiera toujours

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V \leq 1}}$$

Lemme 3.3.

$|h^{-1}(A' - \tau_h A')\,\sqrt{xy}\,\tau_h v|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})}$ reste borné pour $h \neq 0$, $|h| < h_0$.

Puisque $\sqrt{xy}\,\tau_h v$ est dans $V(\mathbb{R}^n_{++})$, on a bien :

$$h^{-1}(A' - \tau_h A')\,\sqrt{xy}\,\tau_h\, v \in V'(\mathbb{R}^n_{++}).$$

On majore la norme dans $V'(\mathbb{R}^n_{++})$, par une somme de terme de la forme :

$$|D^j\,xy\,h^{-1}(\tau_h a'_{ij} - a'_{ij})\,D^i\,(\sqrt{xy}\,\tau_h v)|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})}$$

$$= \sup |< D^j xy\,h^{-1}(\tau_h a'_{ij} - a'_{ij})\,D^i\,(\sqrt{xy}\,\tau_h v), \varphi >_{V' \times V}|$$

$$= \sup |< \sqrt{xy}\,D^i\,(\sqrt{xy}\,\tau_h v), \sqrt{xy}\,h^{-1}\,(\tau_h a'_{ij} - a'_{ij})\,D^j \varphi >_{L^2}|$$

$$\leq C\,|\sqrt{xy}\,\tau_h v|_V \leq C\,|v|_V .$$

Lemme 3.4.

$$\left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h A'\tau_h v - A'v}{h}\right|_{V'} = \left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h g - g}{h}\right|_{V'} \text{ reste borné pour}$$

$h \neq 0$, $|h| < h_0$.

En effet :

$$\left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h g - g}{h}\right|_{V'} = \sup \left|<\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h g - g}{h}, \varphi>_{V'\times V}\right|$$

$$= \sup \left|<g, \sqrt{xy}\ \frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h}>_{L^2}\right|$$

$$\leq |g|_{L^2} \sup \left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h}\right|_{L^2} \leq C|g|_{L^2}.$$

Lemme 3.5.

$\left|h^{-1}[\tau_h A', \sqrt{xy}](\tau_h v - v)\right|_{V'}$ *reste borné pour* $h \neq 0$, $|h| < h_0$.

Exprimons $[A', \sqrt{xy}]$ en posant $A' = \Sigma\ D^j\, a'_{ij}\, xy\, D^i = A^{ij}$. Si D^i et D^j sont distincts de $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$ alors :

$$[A^{ij}, \sqrt{xy}] = 0$$

Etudions le cas où D^i et D^j sont deux dérivées normales, prenons par exemple $D^i = D^j = D_x$:

$$[A^{ij}, \sqrt{xy}] = + D_x\, a'_{ij}\, xy\, \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\, a'_{ij}\, xy\, D_x$$

et nous majorons séparément les deux termes :

$$1°)\ \left| h^{-1} D_x(\tau_h a'_{ij})\ xy \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h v - v) \right|_{V'} =$$

$$\sup \left| \left\langle D_x(\tau_h a'_{ij})\ \sqrt{xy}\ \frac{\sqrt{y}}{2}\ \frac{\tau_h v - v}{h}, \varphi \right\rangle_{V' \times V} \right| \leq$$

$$C \sup \left| \left\langle y \frac{\tau_h v - v}{h}, \sqrt{xy}\ D_x \varphi \right\rangle_{L^2} \right| \leq$$

$$C \left| y \frac{\tau_h v - v}{h} \right|_{L^2} \leq C \left| (x^2+y^2)^{1/2}\ D\ v \right|_{L^2}$$

La dernière expression est bornée d'après la proposition 3.1.

$$2°)\ \left| \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h a'_{ij})\ xy\ D_x \frac{\tau_h v - v}{h} \right|_{V'}$$

$$= \sup \left| \left\langle \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} (\tau_h a'_{ij})\ xy\ D_x \frac{\tau_h v - v}{h}, \ \right\rangle_{V' \times V} \right|$$

$$\leq C \sup \left| \left\langle \sqrt{xy}\ \sqrt{y}\ D_x \frac{\tau_h v - v}{h}, \sqrt{y}\ \tau_h\ a'_{ij} \varphi \right\rangle_{L^2} \right|$$

$$= C \sup \left| \left\langle \sqrt{xy}\ \sqrt{y}\ T_{-1/2}\ D_x \frac{\tau_h v - v}{h}, \sqrt{y}\ T_{1/2} \tau_h\ a'_{ij} \varphi \right\rangle_{L^2} \right|$$

$$\leq C \sup \left| \sqrt{xy} (x^2+y^2)^{1/4}\ T_{-1/2}\ D_x \frac{h v - v}{h} \right|_0 \left| (x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2} (\tau_h a'_{ij}) \varphi \right|_0$$

Par la proposition 1.3 :

$$|(x^2+y^2)T_{1/2}(\ {}_h a'_{ij})\varphi|_o \le C|(\tau_h a_{ij})|_V \le C|\varphi|_V \qquad \text{donc :}$$

$$\left|\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}(\tau_h a'_{ij})\ xy\ D_x \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{V'}$$

$$C\left|\sqrt{xy}\ (x^2+y^2)^{1/4}\ T_{-1/2}\ D_x \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_o$$

Reste à montrer que cette dernière quantité est bornée indépendamment de h :

$$\left|\sqrt{xy}(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{-1/2}\ D_x \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_o \le$$

$$\underbrace{\left|\sqrt{xy}\ T_{-1/2}\ D_x(x^2+y^2)^{1/4} \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_o}_{L} + \underbrace{\left|\sqrt{xy}\ \frac{x}{2(x^2+y^2)^{3/4}}\ T_{-1/2} \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_o}_{M}$$

Majorons L :

$$L^2 = \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)^{-1/2}\ \frac{|e^{ih\xi_i}-1|^2}{h}\ |D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ \hat{v}|^2\ dxdy\ d\xi$$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)^{1/2}\ |D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ \hat{v}|^2\ dxdy\ d\xi$$

$$= C\left|\sqrt{xy}\ D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}v\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \qquad \text{donc :}$$

$$L \le C|(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}v|_V$$

quantité bornée d'après la proposition 3.1.

Pour M on a immédiatement :

$$M \leq C|(x^2+y^2)^{1/4}\, T_{1/2} v|_o \quad \text{donc}$$

$$M \leq C|v|_V \text{ par la proposition 1.3.}$$

Les autres termes intervenant dans

$$h^{-1}[\tau_h A', \sqrt{xy}]\ (\tau_h v - v)$$

contiennent une dérivée normale, ou une dérivée normale et une dérivée tangentielle, et se majorent de façon plus simple. Le lemme 3.5 apparaît donc comme une conséquence de la proposition 3.1.

Lemme 3.6.

$$|h^{-1}[\tau_h A' - A', \sqrt{xy}]\, v|_{V'} \text{ reste borné pour } h \neq 0,\ |h| < h_o.$$

Etudions un terme dans lequel interviennent deux dérivées normales, par exemple :

$$h^{-1}\left[D_x\{(\tau_h a'_{ij} - a'_{ij})\, xy\, D_x\},\ \sqrt{xy}\right] v =$$

$$D_x \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h}\, xy\, \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\, v + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h}\, xy\, D_x v$$

Nous majorons séparément les deux termes de droite :

$$1°)\ \left|D_x \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \sqrt{xy}\, \frac{y}{2}\, v\right|_{V'} \leq$$

$$C \sup \left|\left\langle \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h}\, y\, v,\ \sqrt{xy}\, D_x \varphi \right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\leq C|v|_{L^2}$$

$$2°)\ \left|\frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h}\ \sqrt{xy}\ \frac{\sqrt{y}}{2} D_x v\right|_{V'} \leq$$

$$\leq C \quad \sup \quad \left|< y \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \sqrt{xy}\ D_x v\ , \varphi >_{L^2}\right|$$

$$\leq \quad C\left|\sqrt{xy}\ D_x v\right|_{L^2} \leq C|v|_V$$

les autres termes se majorant de façon analogue.

Tirons les conséquences des propositions 3.1 et 3.2 :

Proposition 3.3.

Si $f \in L^2(\Omega)$, *la solution* u *du problème* (2.3) *vérifie :*

1°) $(x^2+y^2)^{1/2}\ D\ \zeta\ u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *où* D *est une dérivée tangentielle quelconque.*

2°) $xy\ D^\alpha\ \zeta\ u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* $|\alpha| = 2$ *et* D^α *contient au plus une dérivée normale.*

Le 1° est conséquence de la proposition 3.1.

Pour le 2°, si D_1 et D_2 sont deux dérivées tangentielles :

$$xy\ D_1 D_2\ \zeta\ u = \sqrt{xy}\ D_1(\sqrt{xy}\ D_2\ \zeta u) \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

Si D est une dérivée tangentielle :

$$xy\ D_x\ D(\zeta\ u) = \sqrt{xy}\ D_x(\sqrt{xy}\ D\ \zeta u) - \frac{y}{2} D\ \zeta\ u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

d'après les propositions 3.1 et 3.2.

En conclusion, par $\zeta\ u \circ \theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$ et la proposition 3.3, on

obtient :

$$\sum_{\substack{|i|=1 \\ |j|=1}} D^j a'_{ij}(x,y,x')\, xy\, D^i \zeta\, u \circ \theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

où D^j et D^i désignent seulement les dérivées normales. On est donc ramené à une équation aux dérivées partielles d'ordre 2, en deux variables (x,y). Nous étudions dans IV un problème dégénéré dans $\mathbb{R}^2_{++}$ qui nous permettra d'obtenir la régularité pour les variables normales.

IV. Régularité. Cas des variables normales.

Nous commençons par étudier un problème elliptique dégénéré dans l'ouvert non borné $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$\mathbb{R}^2_{++} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ ; \ y > 0 \}.$$

On notera aussi :

$$\mathcal{B} = \{(\xi,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \}$$

$$D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \ ; \ D_y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\delta_s = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s} \ ; \ \delta_\theta = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Le schéma de l'étude est le même qu'au II ; on ramènera le problème dans $\mathbb{R}^2_{++}$ à un problème dans $\mathcal{B}$ par un changement de variables du type :

$$x = e^{-s} \cos\theta ; \ y = e^{-s} \sin\theta.$$

Introduisons les espaces :

Définition 4.1.

$$V_1(\mathbb{R}^2_{++}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \mid \sqrt{xy}\, D_x u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) ;\ \sqrt{xy}\, D_y u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\}$$

$$W(\mathcal{B}) = \{v \in L^2(\mathcal{B}) \mid \sqrt{\sin\theta \cos\theta}\ \delta_s v \in L^2(\mathcal{B}) ;\ \sqrt{\sin\theta \cos\theta}\ \delta_\theta v \quad L^2(\mathcal{B})\}$$

et on a immédiatement :

les espaces V_1 et W sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives :

$$|u|_{V_1} = (|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + |\sqrt{xy}\, D_x u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + |\sqrt{xy}\, D_y u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})})^{1/2}$$

$$|v|_W = (|v|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |\sqrt{\sin\theta \cos\theta}\ \delta_s v|_{L^2(\mathcal{B})} + |\sqrt{\sin\theta \cos\theta}\ \delta_\theta v|^2_{L^2(\mathcal{B})})^{1/2}$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1.1, on obtient :

Proposition 4.1.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_{++})$ est dense dans V_1.

$\mathcal{D}(\mathcal{B})$ est dense dans W.

Les espaces V_1 et W sont liés par :

Proposition 4.2.

Si on pose : $\begin{cases} x = e^{-s}\cos\theta \ ; \ y = e^{-s}\sin\theta \\ u(x,y) = e^{s}\, v(s,\theta) \end{cases}$

alors u est dans V_1 si et seulement si v est dans W.

Introduisons maintenant le :

Problème variationnel.

Pour u_1 et u_2 dans V_1 on considère la forme intégro-différentielle :

$$a(u_1,u_2) = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x,y)xy\, D^i u_1\, \overline{D^j u_2}\, dx\, dy + \int_{\mathbb{R}^2_{++}} a_o\, u_1\, \overline{u_2}\, dx\, dy$$

avec $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^2_{++}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_{++}})$, ce qui assure la continuité de a sur $V_1 \times V_1$.

On suppose que a est V_1-coercitive c'est-à-dire :

$\exists\, \alpha > o$ tel que, $\forall\, u \in V_1$, on ait $\mathrm{Re}\, a(u,u) \geq \alpha\, |u|^2_{V_1}$

et on désigne par A l'opérateur différentiel associé a :

$$A = \sum_{|i|=|j|=1} D^j\, a_{ij}(x,y)\, xy\, D^i + a_o\, I \qquad (4.1)$$

Le lemme de Lax Milgramm fournit la :

Proposition 4.3.

Pour tout f *dans* V_1', *il existe* u *unique dans* V_1 *tel que :*

$a(u,v) = (f,v)_{V_1' \times V_1}$ *pour tout* v *dans* V_1. (4.2)

Nous nous intéresserons à la régularité sur la solution u quand f est dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$. On suppose que :

$$\begin{cases} a_o \text{ est une constante positive} \\ a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2_{++}) \text{ vérifie } a_{ij}(x,y) = a_{ij}(o,o) \text{ pour } x^2+y^2 \geq R^2 ; \end{cases}$$

En d'autres termes, les coefficients de A sont "variables au voisinage de (0,0)". Nous transformons le problème dans $\mathbb{R}^2_{++}$ en un nouveau problème dans , ce dernier sera voisin de celui étudié dans [2]. L'intérêt de la transformation est de permettre l'utilisation de transformations de Fourier suivant la variable tangentielle s.

Proposition 4.4.

La transformation utilisée à la proposition 4.2. transforme

$a(u_1,u_2) = (f,u_2)_{L^2}$; $u_i \in V_1$; $f \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})$ *en* :

$b(v_1,v_2) = (g,v_2)_{L^2(\mathcal{B})}$; $v_i = e^{-s} u_i \in W$;

$g = e^{-s} f \in L^2(\mathcal{B})$ *avec* :

$$b(v_1,v_2) = \int_{\mathcal{D}} \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} b_{ij}(s,\theta) \sin\theta \cos\theta \ \delta^i v_1 \ \overline{\delta^j v_2} \, ds d\theta + \int_{\mathcal{B}} a_o v_1 \overline{v_2} \, ds \, d\theta.$$

En effet :

$$a(u_1,u_2) = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x,y)xy \, D^i u_1 \overline{D^j u_2} \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}^2_{++}} a_o u_1 \overline{u_2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} b_{ij}(s,\theta) \sin\theta \cos\theta \, \delta^i v_1 \overline{\delta^j v_2} \, ds \, d\theta + a_o \int_{\mathcal{D}} v_1 \overline{v_2} \, dx \, d\theta$$

et

$$(f,u_2)_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} f \overline{u_2} \, dx \, dy = \int_{\mathcal{D}} e^{-s} f \overline{v_2} \, ds \, d\theta$$

$$= (g,v_2)_{L^2(\mathcal{B})}.$$

Précisons les propriétés de b :

Propriétés 4.

1°) Pour chaque couple d'indices (i,j) il existe une fonction $\beta_{ij}(\theta) \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2})$ telle que :

$$b_{ij} - \beta_{ij} \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2} ; \mathcal{S}(R_s))$$

2°) La forme b est W-coercitive.

1°) Puisque a ne contient que des termes d'ordre 0 ou des termes d'ordre 2, $b_{ij}(s,\theta)$ se présente comme une combinaison linéaire des $a_{ij}(s,\theta)$ à coefficients des polynômes en sin θ, cos θ donc :

$b_{ij}(s,\theta) \longrightarrow \beta_{ij}(\theta)$ quand $s \longrightarrow \pm \infty$ puisque

$a_{ij}(x,y) = a_{ij}(o,o)$ pour $x^2+y^2 \geq R^2$.

Il est évident que $\beta_{ij} \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2})$; reste à vérifier que

$$b_{ij} - \beta_{ij} \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2} ; \mathcal{S}(R_s)).$$

Pour $s \leq -\text{Log } R$, $b_{ij}(s,\theta) - \beta_{ij}(\theta) = 0$

Pour s tendant vers $+\infty$, pour tout couple m, n

$$s^m \delta_s^n (b_{ij}(s,\theta) - \beta_{ij}(\theta)) \text{ tend vers zéro.}$$

En effet pour n = 0

$$s^m(a_{ij}(e^{-s} \cos\theta, e^{-s} \sin\theta) - a_{ij}(o,o)) \text{ se comporte}$$

comme $(-\text{Log } r)^m \times r$ avec r tendant vers 0 et pour $n = 1$

$$s^m \ \delta_s(a_{ij}(e^{-s}\cos\theta, e^{-s}\sin\theta) - a_{ij}(o,o) =$$

$$= -s^m e^{-s}(D_x a_{ij}\cos\theta + D_y a_{ij}\sin\theta)$$ tend vers zéro

quand s tend vers $+\infty$. Il en est de même pour $n \geq 1$.

2°) A la proposition 4.2, on a montré que :

$$|v|_W \leq C|u|_{V_1}.$$

Pour tout v dans W on a donc :

$$\text{Re } b(v,v) = \text{Re } a(u,u) \geq \alpha|u|^2_{V_1} \geq \frac{\alpha}{C}|v|^2_W .$$

Pour le problème dans $\mathfrak{B}$ nous avons alors :

Proposition 4.5.

Pour tout g *dans* W' *il existe un élément unique* v *dans* W *tel que :*

$$b(v,w) = (g,w)_{W'\times W} \text{ pour tout } g \in W' \qquad (4.3)$$

Si de plus g *est dans* $L^2(\mathfrak{B})$ *alors :*

$$v \in H^1(\mathfrak{B}) \text{ et } \sin\theta\cos\theta\, v \in H^2(\mathfrak{B})$$

Comme au III nous utilisons une régularisation elliptique. La démonstration, à quelques détails près, est la même que dans [2]. Nous avons les inclusions d'espaces :

$$H^1_0(\mathfrak{B}) \subset W(\mathfrak{B}) \subset L^2(\mathfrak{B})$$

avec densité

Soit ε_j une suite de nombres positifs de limite zéro, on pose :

$$b_j(v,w) = b(v,w) + \varepsilon_j(v,w)_1$$

alors $b_j(v,w)$ est continue sur $H_0^1(\mathcal{B}) \times H_0^1(\mathcal{B})$ et $H_0^1(\mathcal{B})$ coercitive. Soit ensuite g_j une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ de limite g dans $L^2(\mathcal{B})$, alors la solution v_j du problème variationnel :

$$b_j(v,w) = (g_j,w) \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

appartient à $\bigcap_{k\geq 0} H^k(\mathcal{B}) \cap H1(\mathcal{B})_0$ et de plus :

$\sqrt{\varepsilon_j}\,|v_j|_1$ et $|v_j|_w$ estent bornée quand j varie.

On sait aussi que la solution v du problème (4.3) est limite faible dans W d'une sous-suite extraite de v_j.

Donnons le schéma de la démonstration de la régularité :

1°) Pour $v(s,\theta)$ distribution dans $\mathcal{B}$, tempérée en s, on note $\hat{v}(\xi,\theta)$ la transformée de Fourier partielle en s, et on introduit l'opérateur T_r ($r \in \mathbb{R}$) par :

$$\widehat{T_r v}(\xi,\theta) = (1+|\xi|^2)^{r/2}\, \hat{v}(\xi,\theta)$$

Alors si $b(s,\theta)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\frac{\pi}{2}])$ telle qu'il existe $\beta(\theta) \in C^\infty[0,\frac{\pi}{2}]$ qui assure :

$$s \longrightarrow b(s,\theta) - \beta(\theta) \text{ est une fonction de } \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

on a :

l'application $v \longrightarrow [b, T_{1/2}]v$ est continue de :

$$L^2(0,\frac{\Pi}{2} ; H^s(\mathbb{R})) \text{ dans } L^2(0,\frac{\Pi}{2} ; H^{s-1/2+1}(\mathbb{R})) \qquad \text{(voir [7])}$$

Ces remarques conduisent au premier résultat :

$$T_{1/2}\, v \in W$$

puis, comme $W \hookrightarrow L^2(0,\frac{\Pi}{2} ; H^{1/2}(\mathbb{R}_s))$ (voir [2] et le rappel donné au I)

$$\delta_s\, v \in L^2(\mathcal{S})$$

2°) on démontre que : $\sqrt{\sin\theta \cos\theta}\ \delta_s\, v \in W$ qui fournit

$$\sin\theta \cos\theta\ \delta_s^2\, v \in L^2(\mathcal{S})$$

$$\sin\theta \cos\theta\ \delta_\theta\, \delta_s\, v \in L^2(\mathcal{S})$$

3°) En reportant ces résultats dans l'équation $B\, v = g$ (B opérateur associé à b) et en tenant compte de $v \in W$ on obtient

$$\delta_\theta(\sin\theta \cos\theta\ \delta_\theta\, v) \in L^2(\mathcal{S})$$

L'application du théorème de Hardy donne alors :

$$\delta_\theta\, v \in L^2(\mathcal{S}) \text{ puis}$$

$$\sin\theta \cos\theta\ \delta_\theta^2\, v \in L^2(\mathcal{S}).$$

L'expression $\sin\theta \cos\theta$ restant bornée sur l'ouvert (non borné) $\mathcal{S}$, on obtient bien en définitive :

$$v \in H^1(\mathcal{S}) \text{ et } \sin\theta \cos\theta\ v \in H^2(\mathcal{S}).$$

Tirons les conséquences de ce résultat pour le problème dans $\mathbb{R}^2_{++}$:

Proposition 4.5!

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, *la solution* $u \in V_1$ *du problème (4.2) vérifie :*

$$\sqrt{x^2+y^2}\, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \; ; \; |\alpha| = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$xy \; D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \; ; \; |\alpha| = 2 \qquad \text{(ii)}$$

En effet, pour (i) nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} (x^2+y^2)\,(|D_x u|^2 + |D_y u|^2)\, dx\, dy =$$

$$\int_{\mathcal{B}} (|v+\delta_s v|^2 + |\delta_\theta v|^2) ds\, d\theta \leq C|v|^2_{H^1(\mathcal{B})}$$

Pour (ii), pour $|\alpha| = 2$, on a :

$$D^\alpha u = \Big(\sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta\, \delta^\beta v\Big) e^{3s} \text{ avec } a_\beta \text{ fonctions } C^\infty \text{ bornées dans } \mathcal{B},$$

qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} x^2 y^2\, |D^\alpha u|^2\, dx\, dy =$$

$$\int_{\mathcal{B}} \sin^2\theta \cos^2\theta \Big|\sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta\, \delta^\beta v\Big|^2 ds d\theta \leq C|\sin\theta\cos\theta\, v|^2_{H^2(\mathcal{B})}$$

Pour conclure cette étude, introduisons :

Définition 4.2.

$$S(\mathbb{R}^2_{++}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \,|\, \sqrt{x^2+y^2}\, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \; ; \; |\alpha| = 1 \; - \; xy\, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \; ; \; |\alpha| = 2 \; .$$

S est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_S = \left(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + \sum_{|\alpha|=1} |\sqrt{x^2+y^2}\, D^\alpha u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + \sum_{|\alpha|\geq 2} |xy\, D^\alpha u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}\right)^{1/2}$$

et nous avons :

THEOREME 2.

L'opérateur A *défini par* (4.1) *est un isomorphisme topologique de* S *sur* $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$.

Vérifions que A est linéaire continu de S dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$. En effet, pour u dans S, on a :

$$|Au|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} \leq a_o |u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + \sum_{|i|=|j|=1} |D^j a_{ij}\, xy\, D^i u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Considérons un terme de la somme ci-dessus, par exemple,

$$|D_x a_{ij}\, xy\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} \leq |(D_x a_{ij})\, xy\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} +$$

$$+ |a_{ij}\, y\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + |a_{ij}\, xy\, D^2_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Puisque $D_x a_{ij} = 0$ pour $x^2+y^2 \geq \mathbb{R}^2$ on a :

$$|D_x a_{ij}\, xy\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} \leq C|u|_S .$$

La proposition 4.5' montre que A est surjectif et le théorème est alors une conséquence du théorème de Banach.

Application à la régularité pour les variables normales.

Au III, nous avons vu que, dans la carte locale (O,Θ) on a :

$$\zeta u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$$

$$\sum_{\substack{|i|=1 \\ |j|=1}} D^j a'_{ij}(x,y,x')\, xy\, D^i \zeta u \circ \Theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

où D^j et D^i désignent les dérivées normales.

De plus l'hypothèse (2.4) entraîne que :

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tel que }, \forall\, (x,y,x') \in O' \cap \overline{\mathbb{R}^n_{++}},\ \forall\, \xi \in \mathbb{C}^2 : \tag{4.4}$$

$$\mathrm{Re} \sum_{|i|=|j|=1} a'_{ij}(x,y,x')\, \xi^i \bar{\xi}^j \geq \delta |\xi|^2$$

Lemme 4.1.

Il existe un "prolongement" des a'_{ij} à $\mathbb{R}^n_{++}$ tel que l'hypothèse (4.4) soit conservée.

Soient O'_1 et O'_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^{n-2}$ respectivement, tels que

$$O'_1 \times O'_2 \Subset O'$$

et supposons que :

$$\mathrm{supp}\ \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \subset O'_1 \times O'_2 .$$

On chsoisit d'abord deux fonctions φ_1 et Ψ_1 dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_{++}})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1\ ;\ 0 \leq \Psi_1 \leq 1\ ;\ \varphi_1 + \Psi_1 = 1\ ;\ \mathrm{supp}\ \varphi_1 \in O'_1\ ;$$

$$\mathrm{supp}\ \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \subset (\mathrm{supp}\ \varphi_1) \times O'_2\ ;\ \varphi_1 = 1 \text{ sur } \mathrm{supp}\ \zeta\, u \circ \Theta^{-1} .$$

Nous définissons alors a''_{ij} sur $\mathbb{R}^2_{++} \times O'_2$ par :

$$a''_{ij}(x,y,x') = \varphi_1(x,y)\, a'_{ij}(x,y,x') + \psi_1(x,y)\, a'_{ij}(0,0,x')$$

On choisit ensuite deux fonctions φ_2 et ψ_2 dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_2 \leq 1 \; ; \; 0 \leq \psi_2 \leq 1 \; ; \; \varphi_2 + \psi_2 = 1 \; ; \; \text{supp}\, \varphi_2 \subset O'_2 \; ;$$

$$\text{supp}\, \zeta\, u \circ \theta^{-1} \subset O'_1 \times (\text{supp}\, \varphi_2) \; ; \; \varphi_2 = 1 \text{ sur supp } \zeta\, u \circ \theta^{-1}.$$

On pose alors :

$$\widetilde{a'_{ij}}(x,y,x') = \varphi_2(x')\, a''(x,y,x') + \psi_2(x')\, a''(x,y,0).$$

On vérifie immédiatement que, pour tout $(x,y,x') \in \overline{\mathbb{R}^n_{++}}$ et $\xi \in \mathbb{C}^2$:

$$\text{Re} \sum_{|i|=|j|=1} (x,y,x')\, \xi^i\, \overline{\xi^j} \geq |\xi|^2$$

Tirons les conséquences de ce lemme ; on pose :

$$a'_{x'}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sum_{|i|=|j|=1} \widetilde{a'_{ij}}(x,y,x')\, xy\, D^i u\, \overline{D^j v}\, dx\, dy +$$

$$+ a_o \int_{\mathbb{R}^2_{++}} u\, \overline{v}\, dx\, dy \quad \text{avec } a_o > 0$$

alors $a'_{x'}$ est continue sur $V_1(\mathbb{R}^2_{++}) \times V_1(\mathbb{R}^2_{++})$ et le lemme 4.1 montre que $q'_{x'}$ est V_1-coercitive. La continuité et la coercivité sont d'ailleurs uniformes en $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Nous terminons maintenant la démonstration de la régularité par :

Proposition 4.6.

Si $f \in L^2(\Omega)$, *la solution* u *du problème* (2.3) *vérifie :*

1°) $(x^2+y^2)^{1/2}\, D\zeta\, u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* D *dérivée normale.*

2°) $xy\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* $|\alpha| = 2$ *et* D^α *formée de deux dérivées normales.*

Désignons par $A'_{x'}$, l'opérateur :

$$A'_{x'} = A'_{x'}(x,y,D) = \sum_{|i|=|j|=1} D^j \widetilde{a'_{ij}}(x,y,x')\, D^i + a_o\, I$$

Par le théorème 2, $A'_{x'}$ est un isomorphisme de S sur $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, donc, il existe une constante C(x') telle que, pour tout u dans S :

$$|u|_S \leq C(x')\, |A'_{x'}\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Montrons que les constantes C(x') sont bornées quand $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$. Pour $u \in S$, $x'_o \in \mathbb{R}^{n-2}$ on a

$$|A'_{x'_o}\, u|_{L^2} \leq |(A'_{x'_o} - A'_{x'})u|_{L^2} + |A_{x'}\, u|_{L^2}$$

et, puisque les coefficients a'_{ij} sont de classe C^1 on a :

$$|(A'_{x'_o} - A'_{x'})u|_{L^2} \leq \varepsilon(|x'-x'_o|)\, |u|_S$$

avec $\varepsilon(|x'-x'_o|)$ tend vers zéro avec $|x-x'_o|$.

On a alors :

$$|u|_S \leq C(x'_o)\, \{\varepsilon(|x'-x'_o|)\, |u|_S + |A_{x'}, u|_{L^2}$$

et en choisissant $|x'-x'_0|$ suffisamment petit pour que

$$\varepsilon(|x'-x'_0|) \leq \frac{1}{2\,C(x'_0)} \quad \text{on obtient :}$$

$$|u|_S \leq 2\,C\,(x'_0)\;|A_{x'},u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} .$$

En tenant compte du fait que $\widetilde{a'_{ij}}$ est constant en dehors d'un compact, il vient :

il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout u dans S :

$$|u|_S \leq C|A'_{x'},\,u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Pour la solution du problème (2.3) nous avons : pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$:

$$\begin{cases} A'_{x'},(\zeta\;\; u \circ \theta^{-1}) \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \\ \zeta\; u \circ \theta^{-1} \in V_1(\mathbb{R}^2_{++}) \end{cases}$$

ce qui montre donc que :

$$|\zeta\; u \circ \theta^{-1}|_{S(\mathbb{R}^2_{++})} \leq C|A'_{x'},(\zeta\; u \circ \theta^{-1})|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

La proposition 4.6 s'obtient ensuite en élevant au carré et en intégrant sur $\mathbb{R}^{n-2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". Bull. Soc. Math. France. 95 (1967), 45-87.

[2] M.S. BAOUENDI et Ch. GOULAOUIC : "Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". Arch. Rat. Mech. and Anal. Vol. 34, 5, (1969), 361-379.

[3] P. GRISVARD : "Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - Série 3, 17 (1963), 255-296.

[4] M.S. HANNA et K.T. SMITH : "Some Remarks on the Dirichlet Problem in Piecewise smooth domains". Com. on pure and App. Math. 20 (1967) 575-593.

[5] B. HANOUZET : "Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre". C.R.A.S. Paris, 268 (1969), 1177-1179.

[6] J.L. LIONS et E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes". Dunod, Paris (1968).

[7] J.J. KOHN et L. NIRENBERG : "An Algebra of pseudo-differential operators". Comm. on pure and App. Math. 18 (1965), 269-305.

[8] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD et G. POLYA : "Inequalities". Cambridge (1952).

Caractérisation de classes de fonctions C^∞ et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel.

par M.S. Baouendi, C. Goulaouic et B. Hanouzet

Introduction.

Sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné et à frontière "régulière par morceaux", on considère une famille d'opérateurs différentiels $\mathcal{A}$ d'ordre 2, elliptiques dans Ω, dégénérés sur $\partial\Omega$ à l'ordre 1 suivant chaque direction normale et qui constituent une généralisation adaptée de l'opérateur de Legendre $-\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$ sur $(-1,+1)$.

Un tel opérateur $\mathcal{A}$ réalise un automorphisme de l'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$, ainsi que de l'espace $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ des fonctions analytiques sur $\overline{\Omega}$. En fait, la régularité analytique découle aussi d'un résultat plus fort sur les itérés de $\mathcal{A}$: si u est une fonction C^∞ sur $\overline{\Omega}$, pour qu'elle soit analytique sur $\overline{\Omega}$ il faut et il suffit qu'il existe une constante $L>0$ telle que l'on ait pour tout entier k, $\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L^{k+1}(2k)!$

Cela nous amène à introduire des espaces intermédiaires entre $C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$, que l'on note $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ pour $s\geqslant 1$, qui sont caractérisés par la croissance de $\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)}$ quand $k \longrightarrow \infty$.

En vue des applications, on étudie le comportement asymptotique des valeurs propres de $\mathcal{A}$ dans le cas autoadjoint, et on montre qu'il est analogue à celui d'un opérateur elliptique d'ordre 2 sur

un ouvert régulier. On en déduit des résultats d'interpolation et d'approximation, en passant par l'isomorphisme de $C^\infty(\bar\Omega)$ et $\mathcal{A}_s(\bar\Omega)$ avec des espaces de suites.

Ceci généralise une partie des résultats de [1] où la frontière est supposée régulière ; des complications supplémentaires, dues à l'irrégularité de la frontière, apparaissent surtout dans le choix des opérateurs différentiels et dans la théorie spectrale. La méthode pour démontrer la régularité consiste ici à ramener l'étude au voisinage du bord de Ω à une étude à l'intérieur pour un opérateur elliptique, en augmentant le nombre de variables.

Dans tout ce travail, les démonstrations se font localement et $\bar\Omega$ peut être remplacée par une variété à bord convenable.

Le plan est le suivant :

I - Description des opérateurs.

1. Ecriture du problème local dans un "coin".
2. Définition d'un ouvert à"frontière voisine de celle du cube".
3. Ecriture globale de l'opérateur $\mathcal{A}$.
4. Problème variationnel associé à $\mathcal{A}$.
5. Ecriture locale de l'opérateur $\mathcal{A}$.
6. Conséquence de la V^k- coercivité de A.

II - Régularité C^∞ ; $D(\mathcal{A}^m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

1. Transformation des espaces et des opérateurs.
2. Etude de $D(\mathcal{A}^m)$; écriture locale.
3. Conséquences (régularité C^∞ et analytique ; compacité).

III - Théorème des itérés ; $\mathcal{A}_s(\bar\Omega)$.

1. Définition des espaces $\mathcal{A}_s(\bar\Omega)$ pour $s \geq 1$.
2. Théorème des itérés pour un opérateur elliptique dans un ouvert
3. Théorème des itérés pour $\mathcal{A}$ dans $\bar\Omega$. Conséquences.

IV - Théorie spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$.

1. Théorème d'inclusion d'espaces de Sobolev avec poids.
2. Croissance des valeurs propres de $\mathcal{A}$.

V - Applications .

1. Résultats d'isomorphismes avec des espaces de suites.

2. Interpolation. Approximation.

Bibliographie.

I - Description des opérateurs.

1. Ecriture du problème local dans un "coin".

Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. On désigne le point courant de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ par $x = (y_1, \ldots, y_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)$. On note :

$$\mathbb{R}_+ =]0, \infty[\; ; \quad D_t = -i \frac{\partial}{\partial t} \; ;$$

(1.1) $$V^k = \{u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \; ; \; \sqrt{y_j}\, D_{y_j} u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant k \text{ et } D_{z_i} u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } k+1 \leqslant j \leqslant n\} .$$

On munit V^k de la norme hilbertienne naturelle.

Soit $\mathcal{O}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$; on note $\underline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cap (\overline{\mathbb{R}}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$. On considère dans $\mathcal{O}$ un opérateur différentiel $A = A(x,D)$ vérifiant les hypothèses (H) suivantes :

(H)
1) $$A(x,D) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} a_i(x)\, D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} a_{ij}(x)\, y_i\, D_{y_i}\, y_j\, D_{y_j} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ |\mu| \leqslant 1}} b_{\mu,i}(x)\, y_i\, D_{y_i} D_z^\mu + \sum_{|\mu| \leqslant 2} c_\mu(x)\, D_z^\mu ,$$

où les coefficients a_i, a_{ij}, $b_{\mu,i}$, c_μ sont de classe C^∞ dans $\overline{\mathcal{O}}$.

2) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in \mathcal{D}(\underline{\mathcal{O}})$

$$\mathrm{Re}(Au, u) \geqslant \alpha \|u\|^2_{V^k} .$$

Remarque 1.1. On pourrait, dans ce qui suit, remplacer l'hypothèse (H.2)) par une inégalité a priori convenable ou par une hypothèse d'ellipticité (cf. proposition 1.4.)

Dans ce travail, nous allons étudier des opérateurs elliptiques dégénérés sur des "ouverts à coins" qui, par changement de variables dans des cartes locales au voisinage du bord, se ramèneront à un

opérateur du type A vérifiant les hypothèses (H). Dans les trois sections suivantes de ce paragraphe, nous allons montrer qu'il est possible de construire de tels opérateurs. Les résultats de régularité et d'itération que nous avons en vue sont de nature locale et n'utilisent que les hypothèses (H).

2. Définition d'un ouvert "à frontière voisine de celle du cube".

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \phi_i(x) > 0 \ \text{ pour } \ i=1, 2, \ldots, p\} \ ,$$

où $\phi_1, \ldots, \phi_p$ désignent p fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \Gamma = \partial\Omega$ on note

$$I(x) = \{i \in \{1, \ldots, p\} \ ; \ \phi_i(x) = 0\} \ ;$$

on désigne par $|I(x)|$ le nombre d'éléments de $I(x)$ et on suppose que l'on a pour tout $x \in \Gamma$, $|I(x)| \leq n$. De plus, pour $x \in \Gamma$ et $|I(x)| = k$, on suppose que le système de vecteurs $\{\text{grad } \phi_i(x)\}_{i \in I(x)}$ est de rang k .

Un ouvert Ω vérifiant les propriétés précédentes est appelé ouvert "à la frontière voisine de celle du cube" ; dans toute la suite nous ne considérerons que de tels ouverts.

Remarque 1.2. La terminologie est justifiée par la description de Ω localement : soit $\underline{x} \in \Gamma$ tel que $|I(\underline{x})| = k$; on peut supposer que l'on a par exemple $I(\underline{x}) = \{1, 2, \ldots, k\}$. Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}'$ de $\underline{x}$ et un difféomorphisme θ de $\mathcal{O}'$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, tels que :

$$\begin{cases} (\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \mathcal{O} \text{ est l'image par } \theta \text{ de } \mathcal{O}' \cap \Omega \\ \partial(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \mathcal{O} \text{ est l'image par } \theta \text{ de } \mathcal{O}' \cap \Gamma \ . \end{cases}$$

On peut prendre par exemple $\theta_i(x) = \phi_i(x)$ pour $i=1, \ldots, k$ et compléter convenablement le système $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.
On remarque que θ peut être pris analytique si les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_p$ sont analytiques.

3. Ecriture globale de l'opérateur $\mathcal{A}$.

On construit dans le cas des ouverts considérés ici, c'est-à-dire à frontière voisine de celle du cube, un opérateur différentiel généralisant celui donné dans ([1] formule (1.4)) pour un ouvert à frontière régulière. Cet opérateur est construit en superposant à celui étudié dans [6] des opérateurs différentiels tangentiels ou dégénérés au bord de Ω .

Il est nécessaire d'introduire quelques notations :

Soit $J = \{I(x) \; ; \; x \in \Gamma \text{ et } |I(x)| \leq n-1\}$.

$$\Phi = \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_p \; ,$$

et pour $(i_1,\ldots,i_k) \in J$,

$$\Phi_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{\Phi}{\phi_{i_1} \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_k}} \; .$$

Nous construisons d'abord des champs de vecteurs "parallèles aux faces ou aux arêtes" de Ω ; de façon précise, nous avons :

Lemme 1.1. Pour chaque $(i_1,\ldots,i_k) \in J$, il existe un système $\mathcal{X}_{i_1\ldots i_k}$ de vecteurs C^∞ de rang inférieur ou égal à $n-k$ et tel que l'on ait pour tout $x \in \Gamma$:

1) Si $I(x) \subset \{i_1,\ldots,i_k\}$, le champ $\mathcal{X}_{i_1\ldots i_k}$ est tangent aux surfaces d'équation $\phi_j = 0$ pour $j \in I(x)$.

2) Si $I(x) = \{i_1,\ldots,i_k\}$, le rang de $\mathcal{X}_{i_1\ldots i_k}$ est $n-k$.

Démonstration : Il suffit de construire un système de vecteurs de rang maximum, orthogonal aux vecteurs grad ϕ_j pour $j \in \{i_1,\ldots,i_k\}$.

Maintenant pour $X = (X_1,\ldots,X_n)$ vecteur de $\mathbb{R}^n$, on note $X.D$ l'opérateur de dérivation suivant X :

$$X.D = \sum_{i=1}^{n} X_i \, D_i \; .$$

Pour $(i_1,\ldots,i_k) \in J$, on définit une forme intégrodifférentielle $a_{i_1\ldots i_k}$ par :

$$(1.2)\quad \begin{cases} a_{i_1\dots i_k}(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_1\dots i_k}(x) \sum_{X\in\mathfrak{X}_{i_1\dots i_k}} X.Du(x)\ \overline{X.Dv(x)}\ dx \\ \text{pour } u \text{ et } v \text{ dans } \mathcal{D}(\bar\Omega)\ . \end{cases}$$

A la forme $a_{i_1\dots i_k}$ on associe l'opérateur différentiel $\mathcal{A}_{i_1\dots i_k}(x,D)$ défini par

$$(1.3)\quad \mathcal{A}_{i_1\dots i_k}(x,D) = \sum_{X\in\mathfrak{X}_{i_1\dots i_k}} (X.D)^*\ \Phi_{i_1\dots i_k}(X.D)\ ,$$

où $(X.D)^*$ est l'adjoint formel de $(X.D)$.

En un point x tel que $\phi_j(x) = 0$ avec $j \notin \{i_1,\dots,i_k\}$, cet opérateur $\mathcal{A}_{i_1\dots i_k}$ est complètement dégénéré ; en un point $x\in\Gamma$ tel que $I(x)\subset\{i_1,\dots,i_k\}$, la partie principale de $\mathcal{A}_{i_1\dots i_k}$ est un opérateur tangentiel aux surfaces d'équation $\phi_j = 0$ pour $j\in I(x)$.

On construit ensuite une forme intégrodifférentielle a définie pour u et v dans $\mathcal{D}(\bar\Omega)$ par :

$$(1.4)\quad \begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega u\ \bar v\ dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \Phi\ D_i u.\overline{D_i v}\ dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in J} a_{i_1\dots i_k}(u,v)\ , \end{cases}$$

à laquelle est associé l'opérateur différentiel :

$$(1.5)\quad \mathcal{A}(x,D) = I + \sum_{i=1}^n D_i\ \Phi\ D_i + \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in J} \mathcal{A}_{i_1\dots i_k}(x,D)\ .$$

Remarquons tout de suite que l'opérateur $\mathcal{A}$ est elliptique dans Ω, dégénéré sur Γ , à coefficients C^∞ et même analytiques si les données $(\phi_j)_{1\le j\le p}$ sont analytiques. On peut évidemment généraliser la forme de $\mathcal{A}$ mais on veut seulement ici montrer l'existence de tels opérateurs.

Il est facile de voir comment (1.5) redonne un opérateur de la forme étudiée dans [1] dans le cas où Ω est défini par une seule fonction ϕ (c.à.d. $p=1$) .

4. Problème variationnel associé à $\mathcal{A}$.

On considère l'espace :

$$(1.6)\quad \begin{cases} \mathcal{V}(\Omega) = \{u\in L^2(\Omega) \ ; \ \phi^{1/2} D_i u \in L^2(\Omega) \text{ pour } i=1,\dots,n \text{ et} \\ \text{pour tout } (i_1,\dots,i_k)\in J \ , \ \phi_{i_1\dots i_k}^{1/2}(X,D)u \in L^2(\Omega) \text{ pour} \\ \text{tout } X\in \mathfrak{X}_{i_1\dots i_k}\} \\ \text{muni de la norme naturelle hilbertienne.} \end{cases}$$

Il est immédiat que $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu algébriquement et topologiquement dans $H^1_{loc}(\Omega)$.(*)

Pour $\xi\in\mathcal{D}(\bar\Omega)$, l'application

$$u \longmapsto \xi u$$

est continue de $\mathcal{V}(\Omega)$ dans lui-même.

Pour étudier $\mathcal{V}(\Omega)$ au voisinage de Γ , on montre le résultat :

Lemme 1.2. Soit $\underline{x}\in\Gamma$ tel que $|I(\underline{x})| = k$; il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ voisinage de $\underline{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme θ de $\mathcal{O}'$ sur un voisinage $\mathcal{O}$ de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tels que l'on ait pour tout $\xi\in\mathcal{D}(\bar\Omega\cap\mathcal{O}')$ l'équivalence des propriétés :

i) $\xi u\in\mathcal{V}(\Omega)$

ii) $\xi u \circ \theta^{-1}\in V^k$, où V^k est défini par (1.1).

Démonstration : Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $I(\underline{x}) = \{1,\dots,k\}$. Nous choisissons un difféomorphisme θ comme au 2. remarque 1.2.

Soit $\xi\in\mathcal{D}(\bar\Omega\cap\mathcal{O}')$; pour $u\in\mathcal{V}(\Omega)$, on pose

$$v = \xi u \circ \theta^{-1} .$$

(*) $H^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev $\{u\in L^2(\Omega) \ ; \ D^\alpha u\in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha|\leq m\}$ et $H^m_{loc}(\Omega)$ est l'espace des $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ qui sont localement dans $H^m(\Omega)$.

Soit $X = (X_1,\dots,X_n) \in \mathbb{R}^n$; on a

$$(X.D)\xi u = \sum_{j=1}^{n} (X.\ \text{grad}\ \theta_j) D_j v \circ \theta \ , \text{ donc}$$

$$(X.D)\xi u \circ \theta^{-1} = \sum_{j=1}^{n} ((X.\text{grad}\ \theta_j) \circ \theta^{-1}) D_j v \ .$$

Montrons d'abord que l'on a

$$\|v\|_{V^k} \leq C \|\xi u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \ . \tag{1.7}$$

L'hypothèse "$\phi^{1/2} D_i u \in L^2(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq n$" montre facilement que l'on a

$$\sqrt{y_1 y_2 \dots y_k}\ D_j v \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \quad \text{pour} \quad j=1,\dots,n \ .$$

Pour $X \in \mathfrak{X}_{1\dots k}$ et $j \in \{1,\dots,k\}$, $(X \text{ grad } \theta_j) \circ \theta^{-1}$ s'annule (cf. lemme 1.1) sur chacune des surfaces $x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq k$; il s'ensuit que

$$(X.\ \text{grad}\ \theta_j) \circ \theta^{-1} \text{ est un } O(x_1 \dots x_k) \ .$$

L'hypothèse "$\Phi^{1/2}_{1\dots k} (X.D)(\xi u) \in L^2(\Omega)$ pour tout $X \in \mathfrak{X}_{1\dots k}$" et ce qui précède, montrent que l'on a

$$\sum_{j=k+1}^{n} (X \text{ grad } \theta_j) \circ \theta^{-1} \ . \ D_j v \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \ .$$

Une nouvelle utilisation du lemme 1.1 montre que

$$D_{z_j} v \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \quad \text{pour} \quad j=k+1,\dots,n \ .$$

De même "$\phi^{1/2}_{1\dots(k-1)} (X.D)(\xi u) \in L^2(\Omega)$ pour tout $X \in \mathfrak{X}_{1\dots(k-1)}$" implique que l'on a

$$\sqrt{y_k}\ D_j v \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \quad \text{pour} \quad j=k,\dots,n \ .$$

En particulier $\sqrt{y_k}\ D_{y_k} v \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$; de la même manière on montre

que $\sqrt{y_j}\, D_{y_j} v \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$ pour $1 \leq j \leq k$.

Réciproquement montrons que l'on a

$$\|\xi u\|_{\mathcal{V}(\Omega)} \leq C \|v\|_{V^k} .$$

Nous considérons un terme de la forme $\phi^{1/2}_{i_1,\ldots,i_\ell}(X.D)(\xi u)$ avec $X \in \mathcal{X}_{i_1,\ldots,i_\ell}$ et on suppose $i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell$.

On fait la partition :

$$\{i_1,\ldots,i_q\} \subset \{1,\ldots,k\} \quad \text{et} \quad \{i_{q+1},\ldots,i_\ell\} \subset \{k+1,\ldots,p\} ;$$

on écrit : $\{1, 2,\ldots,k\} = \{i_1, i_2,\ldots,i_q, j_{q+1},\ldots,j_k\}$.

Dans $\phi_{i_1\ldots i_\ell} \circ \theta^{-1}$, le produit $y_{j_{q+1}}\ldots y_{j_k}$ est en facteur.

Notons que l'on a $X.\operatorname{grad} \theta_j = 0$ pour $X \in \mathcal{X}_{i_1\ldots i_\ell}$ et $j \in \{i_1,\ldots,i_q\}$ sur les surfaces $y_{i_1} = 0,\ldots,y_{i_q} = 0$.

On a

$$\|\phi^{1/2}_{i_1\ldots i_\ell}(X.D)u\| \leq C \sum_{j=k+1}^{n} \|D_j v\| + C \sum_{j \in \{i_1,\ldots,i_q\}} \|(X.\operatorname{grad} \theta_j) \circ \theta^{-1} D_j v\|$$

$$+ C \sum_{j \in \{j_{q+1},\ldots,j_k\}} \|\sqrt{y_{j_{q+1}}\ldots y_{j_k}}\, D_j v\|$$

et chacune des sommes ci-dessus est majorée par $\|v\|_{V^k}$; ce qui termine la démonstration du lemme 1.2.

On en déduit en particulier le résultat :

<u>Proposition 1.1.</u> <u>L'espace</u> $\mathcal{V}(\Omega)$ <u>est un espace normal de distributions, contenu dans</u> $L^2(\Omega)$.

En effet, il suffit de vérifier que l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$ est dense dans $V^k(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$, ce qui se fait par la technique usuelle de troncature et régularisation (cf. [6] ou [1]).

Par construction même, la forme a est continue sur $\mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ et $\mathcal{V}(\Omega)$-coercitive ; du lemme de Lax-Milgramm, on déduit donc :

Proposition 1.2. Pour tout $f \in \mathcal{V}'(\Omega)$, il existe u unique dans $\mathcal{V}(\Omega)$ tel que l'on ait

$$a(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}'(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ (ou } \mathcal{D}(\Omega)) ;$$

ou encore : l'opérateur $\mathcal{A}(x,D)$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{V}(\Omega)$ sur son dual $\mathcal{V}'(\Omega)$.

5. Ecriture locale de l'opérateur $\mathcal{A}$.

On montre qu'au voisinage de $\underline{x} \in \Gamma$ tel que $I(\underline{x}) = \{1,\dots,k\}$, l'opérateur $\mathcal{A}$ est "essentiellement de la forme (dans $\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$)" :

$$\sum_{i=1}^{k} D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i} + \text{un opérateur elliptique en } z_{k+1},\dots,z_n .$$

Plus précisément on a le résultat :

Proposition 1.3. 1) L'opérateur $\mathcal{A}$ est elliptique à l'intérieur dans Ω.

2) Soit $\underline{x} \in \Gamma$ tel que $I(\underline{x}) = \{1,\dots,k\}$. Il existe un voisinage de $\underline{x}$ et un difféomorphisme θ (cf. remarque 1.1) qui transforme l'opérateur $\mathcal{A}$ dans ce voisinage de $\underline{x}$ en un opérateur A vérifiant les hypothèses (H).

Démonstration : Si on pose $v = u \circ \theta^{-1}$, on a

$$D_i u = \sum_{j=1}^{n} (D_j v \circ \theta).D_i \theta_j ,$$

donc pour $X = (X_1,\dots,X_n)$,

$$(X.D)u = \sum_{j=1}^{n} (X.\operatorname{grad} \theta_j).D_j v \circ \theta .$$

Etudions les divers termes apparaissant dans $\mathcal{A}$; il suffit de regarder un terme de la forme $(X.D)^* \Phi_{i_1\dots i_\ell}(X.D)$ selon la position de $(i_1,\dots,i_\ell)$ par rapport à $(1,\dots,k)$, avec $X \in \mathcal{H}_{i_1\dots i_k}$.

On voit aisément que tous les termes qui apparaissent sont dans l'expression (1.8), en utilisant des raisonnements analogues à ceux intervenant dans la démonstration du lemme 1.2. La propriété (H.2)) résulte immédiatement de la coercivité de a sur $\mathcal{V}(\Omega)$.

Dans toute la suite nous n'utiliserons que les informations que nous fournit la proposition 1.3. Mais il fallait décrire globalement un opérateur $\mathcal{A}$ (dont l'existence a priori n'était pas évidente, surtout à coefficients analytiques).

6. Conséquence de la V^k-coercivité sur A (vérifiant (H.2))).

On montre que l'hypothèse (H.2)) implique la positivité d'une partie du symbole de A ; plus précisément on a :

Proposition 1.4. Pour l'opérateur A vérifiant (H) on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j(0)\xi_j^2 + \sum_{|\mu|=2} c_\mu(0)\xi^\mu \Big) \geqslant \alpha |\xi|^2$$

(ξ^μ ne fait intervenir que les composantes ξ_j pour $j>k+1$) .

Démonstration : Soit $\psi \in \mathcal{D}(\underline{\sigma})$ et considérons $u(x) = \psi(x)e^{i\tau x.\eta}$ pour $\eta \in \mathbb{R}^n$ et $\tau>0$; on reporte dans (H.2)) et on fait tendre τ vers l'infini ; on obtient :

$$\mathrm{Re} \int_{\underline{\sigma}} \Big\{ \sum_{j=1}^{k} a_j(x)\, y_j\, \eta_j^2 + \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, y_i\, y_j\, \eta_i\, \eta_j + \sum_{\substack{j=1 \\ |\mu|=1}}^{k} b_{\mu,j}(x)\, y_j\, \eta_j\, \eta^\mu + \sum_{|\mu|=2} c_\mu(x)\, \eta^\mu \Big\} |\psi(x)|^2\, dx$$

$$\geqslant \alpha \int_{\underline{\sigma}} \Big\{ \sum_{j=1}^{k} y_j\, \eta_j^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j^2 \Big\} |\psi(x)|^2\, dx .$$

Soit $0<t\leqslant 1$; on fait le changement de variables $x = tx'$ dans les intégrales ci-dessus ; on remplace ψ par ψ_t définie par $\psi_t(x) = \psi(\frac{x}{t})$; et on pose :

$$\begin{cases} \sqrt{t}\ \eta_j = \xi_j & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant k \\ \eta_j = \xi_j & \text{pour} \quad k+1 \leqslant j \leqslant n \ . \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\operatorname{Re} \int_{\underline{\sigma}} \{\sum_{j=1}^{k} a_j(tx')\xi_j^2 + \sum_{|\mu|=2} c_\mu(tx')\xi^\mu\} \ |\psi(x')|^2 \ dx'$$

$$- \alpha \int_{\sigma} \{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\} \ |\psi(x')|^2 \ dx'$$

$$\geqslant - \sqrt{t} \int_{\sigma} \{\sqrt{t} \sum_{i,j} a_{ij}(tx')\xi_i\xi_j + \sum_{\substack{j=1 \\ |\mu|=1}} b_{\mu,j}(tx')\xi_j\xi^\mu\} \ |\psi(x')|^2 \ dx' \ .$$

la proposition 1.4 en résulte en faisant tendre t vers 0 .

II - Régularité C^∞ ; $D(\mathcal{A}^m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

On se propose d'étudier la régularité C^∞ et les domaines des itérés de l'opérateur $\mathcal{A}$ défini au I, et qui sont nécessaires pour la théorie spectrale (chap. IV).

On définit $D(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{V}(\Omega) \; ; \; \mathcal{A}u \in L^2(\Omega)\}$,

et pour $m \geq 2$, $D(\mathcal{A}^m) = \{u \in D(\mathcal{A}^{m-1}) \; ; \; \mathcal{A}u \in D(\mathcal{A}^{m-1})\}$.

L'opérateur $\mathcal{A}$ étant elliptique dans Ω à coefficients C^∞ , on a immédiatement :

$$D(\mathcal{A}^m) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad m \in \mathbb{N} . \tag{2.1}$$

La difficulté est donc seulement dans l'étude de la régularité au bord, c'est-à-dire l'étude de la régularité de l'opérateur A vérifiant (H) au voisinage de l'origine de $\overline{\mathbb{R}}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$.

L'idée directrice, qui permet de traiter ici ce problème, est que le changement de variables $y = s^2 + t^2$ fait passer de l'opérateur $4D_y \, y \, D_y$ sur $]0,\infty[$ à l'opérateur $(D_t^2 + D_s^2)$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Cela nous permet, modulo quelques vérifications techniques, de ramener l'étude de $\mathcal{A}$ au bord à l'étude d'un opérateur elliptique sur un ouvert. La même idée sera utilisée au chapitre III pour l'étude des itérés de $\mathcal{A}$.

Soit $A = A(x,D)$ vérifiant (H).

On utilise le changement de variables :

$$\begin{cases} y_1 = s_1^2 + t_1^2 \\ \cdots\cdots \\ y_k = s_k^2 + t_k^2 \\ z_j = z_j \quad \text{pour} \quad k+1 \leq j \leq n , \end{cases} \tag{2.2}$$

qui transporte le problème sur $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$.

On note $F = F(s,t,z,D_s,D_t,D_z)$ l'opérateur déduit de A par ce changement de variables. A priori, F est un opérateur différentiel

opérant dans $\mathcal{D}'((\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$; on va le considérer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$. La description des domaines $D(\mathcal{A}^m)$ résultera du changement des espaces entraîné par (2.2) ; comme conséquences, on aura la régularité C^∞ et analytique jusqu'au bord pour l'opérateur $\mathcal{A}$, la compacité de $D(\mathcal{A})$ dans $L^2(\Omega)$.

1. Transformation des espaces et des opérateurs.

Etudions d'abord le transformé de V^k par le changement de variables (2.2).

Soit une fonction u sur $\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$; il lui correspond la fonction v sur $(\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ définie par :

$$
\begin{aligned}
v(s,t,z) &= v(s_1,t_1,\dots,s_k,t_k,z_{k+1},\dots,z_n) \\
&= u(s_1^2+t_1^2,\dots,s_k^2+t_k^2,z_{k+1},\dots,z_n) \ .
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

On vérifie immédiatement le résultat :

Lemme 2.1. Pour que la fonction u soit dans $L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$, il faut et il suffit que la fonction v associée par (2.3) soit dans $L^2((\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$.

De même on a

Lemme 2.2. Pour que la fonction u soit dans $V^k(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$ il faut et il suffit que la fonction v associée par (2.3) soit dans $H^1((\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Démonstration : Il est immédiat que, pour $i \geqslant k+1$, $D_i u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$ équivaut à $D_i v \in L^2((\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on a
$$
\begin{cases} D_{s_i} v = 2 s_i \, D_{y_i} u \\ D_{t_i} v = 2 t_i \, D_{y_i} u \ , \end{cases}
$$

donc :
$$
\int_{(\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}} (|D_{s_i} v|^2 + |D_{t_i} v|^2) \, ds \, dt \, dz
= C \int_{\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}} y_i |D_{y_i} u|^2 \, dy \, dz \ ,
$$

ce qui démontre le lemme 2.2.

Nous utilisons maintenant un lemme sur les distributions de l'espace H^{-1} :

Lemme 2.3. Soient k et ℓ deux entiers, $k \geq 1$ et $\ell \geq 0$, et soit $T \in H^{-1}(\mathbb{R}^{2k+\ell})$ à support contenu dans $\complement((\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^\ell)$. Alors $T = 0$.

Démonstration : On peut immédiatement se ramener au cas où T est à support compact.

Nous faisons une récurrence sur l'entier k.

1) Montrons la propriété pour $k=1$, ℓ entier positif ou nul quelconque.

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2+\ell}) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^{2+\ell})$ avec

$$\operatorname{supp} T \subset \complement((\mathbb{R}^2-\{0\}) \times \mathbb{R}^\ell = \{0\} \times \mathbb{R}^\ell .$$

D'après [10] on sait que T est de la forme :

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D_x^\alpha \delta \otimes T_{\alpha,y}$$

avec $\operatorname{supp} T_{\alpha,y} \subset \operatorname{supp} T$

(en désignant par (x,y) le point générique de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\ell$).

La condition $T \in H^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\ell)$ implique alors que :

$$\|T\|^2_{H^{-1}} = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\ell} (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-1} \, |\hat{T}(\xi,\eta)|^2 \, d\xi \, d\eta$$

$$= \int (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-1} \, \Big| \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^\alpha \hat{T}_\alpha(\eta) \Big|^2 \, d\xi \, d\eta < \infty .$$

Mais comme

$$(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-1} \geq (1+|\xi|^2)^{-1} (1+|\eta|^2)^{-1}$$

on a

$$\|T\|^2_{H^{-1}} \geq \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{-1} \, d\xi \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big| \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^\alpha (1+|\eta|^2)^{-1/2} \, \hat{T}_\alpha(\eta) \Big|^2 \, d\eta$$

et cette intégrale n'est convergente que pour $\hat{T}_\alpha(\eta) = 0$ pour $|\alpha| \leq m$, ce qui implique $T = 0$.

2) Supposons le résultat vrai jusqu'au rang k $(k \geq 1)$ pour ℓ quelconque. Soit T une distribution vérifiant :

$$\begin{cases} T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2(k+1)} \times \mathbb{R}^\ell) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^{2(k+1)} \times \mathbb{R}^\ell) \\ \text{supp } T \subset \complement(\mathbb{R}^2 - \{0\})^{k+1} \times \mathbb{R}^\ell . \end{cases}$$

Montrons d'abord que ces conditions impliquent en fait :

$$\text{supp } T \subset \{0\}^{k+1} \times \mathbb{R}^\ell . \tag{2.4}$$

En effet, soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2(k+1)+\ell})$ telle que

$$\text{supp } \phi \subset \mathbb{R}^{2k} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}^\ell .$$

Alors $\phi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2(k+1)+\ell}) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^{2(k+1)+\ell})$

$$\text{supp } \phi T \subset \complement(\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{\ell+2} ,$$

et par l'hypothèse de récurrence $\phi T = 0$.

Par la même démonstration sur les autres variables on obtient (2.4).

La conclusion $T = 0$ s'obtient ensuite à partir de (2.4) comme au 1).

Soit maintenant $u \in V^k(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$, on note encore v la fonction associée à u dans le changement de variables (2.3) et comme v est au moins dans $L^2((\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$, on lui associe la distribution $\tilde{v}$ sur $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ qui est dans $L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$ et coïncide avec v sur $(\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Soit D une dérivation dans $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$; on a

$D\tilde{v} \in H^{-1}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$

$Dv \in L^2((\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ donc $\widetilde{Dv} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

$D\tilde{v} - \widetilde{Dv}\big|_{(\mathbb{R}^2 - \{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}} = 0$; d'après le lemme 2.3, on a donc

donc $D\tilde{v} = \widetilde{Dv} \in L^2(\mathbb{R}^{2k}_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$. Il résulte alors du lemme 2.2 :

Proposition 2.1. Pour que la fonction u soit dans $V^k(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$ il faut et il suffit que la fonction $\tilde{v}$ associée soit dans $H^1(\mathbb{R}^{2k}_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Etudions maintenant la transformation des opérateurs A par le changement de variables (2.1) ; on a

$$(2.5)\quad \begin{cases} D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i} & \text{donne} \quad \frac{1}{4}(D^2_{s_i} + D^2_{t_i}) = \frac{1}{4}\Delta_i \\ y_i\, D_{y_i} & \text{donne} \quad \frac{1}{2}(s_i D_{s_i} + t_i D_{t_i}) \text{ , pour } 1 \leqslant i \leqslant k . \end{cases}$$

On en déduit que l'opérateur transformé de A s'écrit :

$$(2.6)\quad \begin{aligned} F \equiv F(s,t,z,D_s,D_t,D_z) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} a_i(s,t,z)\Delta_i \\ &\quad + \sum_{|\mu|\leqslant 2} c_\mu(s,t,z)\, D_z^\mu \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(s,t,z)\, \frac{1}{4}\,(s_i D_{s_i} + t_i D_{t_i})(s_j D_{s_j} + t_j D_{t_j}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\mu|\leqslant 1} b_{\mu,i}(s,t,z)\, \frac{1}{2}\,(s_i D_{s_i} + t_i D_{t_i}) D_z^\mu . \end{aligned}$$

De la proposition 1.4, on déduit immédiatement que l'opérateur F est fortement elliptique au point $(0,0,0)$. Dans la suite on se placera toujours dans un voisinage de l'origine suffisamment petit pour que F y soit uniformément fortement elliptique.

Remarquons aussi que les coefficients de F sont C^∞ (resp. analytiques) si les données sont C^∞ (resp. analytiques).

2. Etude de $D(\mathcal{A}^m)$; écriture locale.

D'après (2.1), il ne reste plus qu'à étudier $D(\mathcal{A}^m)$ au voisinage d'un point du bord Γ . Nous faisons donc une étude pour l'opérateur A vérifiant (H) dans $\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$, et on peut

supposer que les fonctions considérées ont leur support dans un voisinage $\underline{\sigma}$ de 0 tel que le transformé F de A soit uniformément elliptique sur l'ouvert $\tilde{\sigma}$ déduit de $\underline{\sigma}$ par le changement de variables (2.2).

On pose :

$$(2.7)\qquad \begin{cases} E^0 = \{u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \ ; \ \text{supp } u \subset \underline{\sigma}\} \\ E^1 = \{u \in V^k(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \ ; \ \text{supp } u \subset \underline{\sigma}\} \\ E^\ell = \{u \in E^{\ell-1} \ ; \ Au \in E^{\ell-2}\} \ \text{pour tout} \ \ell \geq 2 . \end{cases}$$

On en déduit, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(2.8)\qquad \{u \in D(A^m) \ ; \ \text{Supp } u \subset \underline{\sigma}\} = E^{2m} .$$

On a le résultat :

Proposition 2.2. Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Soit u une fonction sur $\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$ à support dans $\underline{\sigma}$; pour que u soit dans E^ℓ, il faut et il suffit que la fonction $\tilde{v}$ associée par (2.3) soit dans $H^\ell(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Démonstration : La proposition est vraie pour $\ell=0$ et 1 d'après le lemme 2.1 et la proposition 2.1.

Nous allons la supposer vraie jusqu'à $\ell-1 \geq 1$ et montrer qu'elle est vérifiée aussi pour ℓ ; en effet : dire que u est dans E^ℓ signifie que u est dans $E^{\ell-1}$ et Au dans $E^{\ell-2}$, c'est-à-dire $\tilde{v}$ dans H^ℓ et $\widetilde{Fv}$ dans $H^{\ell-2}$; comme on a aussi $F\tilde{v}$ dans $H^{\ell-3}$ et $\text{supp}(\widetilde{Fv}-F\tilde{v}) \subset \complement(\mathbb{R}^2-\{0\})^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, on en déduit $\widetilde{Fv} = F\tilde{v} \in H^{\ell-2}$ et F étant uniformément fortement elliptique dans $\tilde{\sigma}$, on en déduit $\tilde{v} \in H^\ell$; la réciproque est immédiate.

On en déduit la description de $D(A^m)$:

Théorème 2.1. L'espace E^{2m} est constitué par les $u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k})$ à support dans $\underline{\sigma}$ telles que

$$(2.9)\qquad \begin{cases} y_i^q \, D_{y_i}^{m+q} u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \ \text{pour} \ 0 \leq q \leq m \ \text{et} \ 1 \leq i \leq k . \\ D_z^\mu u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) \ \text{pour} \ |\mu| \leq 2m . \end{cases}$$

Il en résulte le corollaire :

Corollaire 2.1. L'espace $D(\mathcal{A}^m)$ est constitué par les fonctions $u \in H^{2m}_{loc}(\Omega)$ telles que, localement au voisinage de tout $\underline{x} \in \Gamma$ (avec $|I(\underline{x})| = k$ et on suppose $I(\underline{x}) = \{1,\dots,k\}$) on ait $u \circ \mathcal{O}$ dans l'espace E^{2m} décrit par (2.9) .

En particulier on a

$$H^{2m}(\Omega) \subsetneq D(\mathcal{A}^m) \subsetneq H^m(\Omega) \quad . \tag{2.9'}$$

Démonstration du théorème : Il suffit, compte-tenu des résultats déjà obtenus (proposition 2.2), de vérifier que pour une fonction $u \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$ à support compact, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La fonction u vérifie (2.9).

ii) La fonction $\tilde{v}$ associée par (2.3) est dans $H^{2m}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Montrons que ii) implique i) ; soit $\tilde{v} \in H^{2m}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$; on en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} D_z^\mu \tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } |\mu| \leqslant 2m \\ \Delta_i^\ell \tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } 0 \leqslant \ell \leqslant m \\ \Delta_i^\ell \tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } 0 \leqslant \ell \leqslant m-1 \ , \end{cases}$$

ce qui implique :

$$(2.10) \quad \begin{cases} D_z^\mu u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } |\mu| \leqslant 2m \\ (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^\ell u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } 0 \leqslant \ell \leqslant m \\ \sqrt{y_i}\, D_{y_i} (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^\ell u \in L^2(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } 0 \leqslant \ell \leqslant m-1 \ , \end{cases}$$

ce qui, grâce aux inégalités de Hardy (pour chaque variable y_i ; cf. remarque 2.1 ci-dessous) implique que u vérifie (2.9).

Inversement, soit u vérifiant (2.9) ; on en déduit immédiatement les relations (2.10). La proposition 2.1 et le lemme

2.3 permettent d'en déduire :

$$\begin{cases} \Delta_i \tilde{v} \in L^2 & \text{pour } 1 \leq i \leq k \\ D_z^{\mu} \tilde{v} \in L^2 & \text{pour } |\mu| \leq 2 \end{cases},$$

ce qui implique que l'on a : $\tilde{v} \in H^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.
De même, on a, pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$,

$$\widetilde{\Delta_i v} \in H^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$$

et comme $\widetilde{\Delta_i v} - \Delta_i \tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$, on en déduit :
$\Delta_i \tilde{v} \in H^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$; on en déduit $\tilde{v} \in H^4(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Par récurrence, on en conclut que $\tilde{v} \in H^{2m}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.
On peut remarquer que dans cette démonstration, on se ramène à traiter une seule variable pour u et deux variables pour $\hat{v}$.

Remarque 2.1. (inégalités de Hardy). Les inégalités utilisées ici et au chapitre III reposent sur la transformation de Hardy :

Soit $f \in \mathcal{D}([0,\infty[)$; on a pour tout $t \in]0,\infty[$,

$$f(t) = \frac{i}{t} \int_0^t D_\sigma(\sigma\, f(\sigma))\, d\sigma$$

d'où :

$$\|Df\|_{L^2(0,\infty)} \leq \frac{2}{3} \|D\, t\, Df\|_{L^2(0,\infty)} , \tag{2.11}$$

cette inégalité ayant encore lieu pour les fonctions f de $L^2(0,\infty)$ telles que $D\, t\, Df \in L^2(0,\infty)$ et $\sqrt{t}\, D_t f \in L^2(0,\infty)$.

De même, on montre par récurrence sur k , la relation :

$$(D_t t\, D_t)^k\, D_t f = \frac{i}{t^{k+1}} \int_0^t \sigma^k (D_\sigma \sigma\, D_\sigma)^{k+1} f(\sigma)\, d\sigma ;$$

on en déduit :

$$\|(D_t t\, D_t)^k\, D_t f\|_{L^2(0,\infty)} \leq \frac{2}{2k+1} \|(D_t t\, D_t)^{k+1} f\|_{L^2(0,\infty)} ;$$

en itérant, on obtient :

(2.12) $$\|D_t^k f\|_{L^2(0,\infty)} \leq \frac{2^k}{k!} \|(D_t t\, D_t)^k f\|_{L^2(0,\infty)} .$$

Les inégalités écrites ici sont valables aussi pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

3. Conséquences (régularité C^∞ et analytique ; compacité).

Il résulte du corollaire 2.1 (puisque Ω est assez régulier, ayant la propriété du cône) :

Corollaire 2.2. Pour $m \geq 1$, l'injection de $D(\mathcal{A}^m)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

On a aussi la régularité $C^\infty(\overline{\Omega})$; plus précisément :

Corollaire 2.3. Soit $u \in \mathcal{V}(\Omega)$ et tel que $\mathcal{A}u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Autrement dit : $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^\infty(\overline{\Omega})$ sur lui-même.

En effet, on voit que $u \in D(\mathcal{A}^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc à $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega)$, donc à $C^\infty(\overline{\Omega})$.

De même :

Corollaire 2.4. Soit $u \in \mathcal{V}(\Omega)$ tel que $\mathcal{A}u = \lambda u$ (avec $\lambda \in \mathbb{C}$) ; alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.2. L'adjoint $\mathcal{A}^*$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ (au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$) est de la même forme que $\mathcal{A}$ et peut être prolongé naturellement à un voisinage Ω_1 de $\overline{\Omega}$ et on peut vérifier (grâce à la dégénérescence au bord) que $\mathcal{A}^*$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{D}'_{\overline{\Omega}}$ sur lui-même, en désignant par $\mathcal{D}'_{\overline{\Omega}}$ l'espace des distributions (sur Ω_1) à support dans $\overline{\Omega}$, espace qui s'identifie au dual de $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Si, en plus des hypothèses (H), on suppose maintenant les données analytiques, on obtient le résultat :

Théorème 2.2. Soit $\underline{\underline{\sigma}}$ un voisinage de l'origine dans $\overline{\mathbb{R}}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$. Soit une fonction $u \in C^\infty(\underline{\underline{\sigma}})$ telle que Au soit analytique dans $\underline{\underline{\sigma}}$; alors u est analytique dans $\underline{\underline{\sigma}}$.

Démonstration : En utilisant le changement de variables (2.2) et l'analyticité à l'intérieur pour un opérateur elliptique, on montre l'analyticité de v (associée à u par (2.3)) dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}$. La fonction

$$(s,z) \longmapsto u(s_1^2,\ldots,s_k^2,z_{k+1},\ldots,z_n)$$

est donc analytique (par restriction à $t=0$ de la fonction analytique v) et de plus paire par rapport aux variables $s_1,\ldots,s_k$; donc u est elle-même analytique au voisinage de l'origine dans $\overline{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Il en résulte immédiatement :

Corollaire 2.5. L'opérateur $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ sur lui-même.

Notons que ces résultats d'analyticité sont aussi une conséquence des résultats plus forts sur les itérés de $\mathcal{A}$ (ou A) obtenus au paragraphe III.

-:-:-:-

III - Théorème des itérés, régularité analytique ; $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$.

Dans tout ce chapitre, on va supposer les fonctions $\phi_1,\dots,\phi_p$ analytiques, le lecteur vérifiera aisément que certains énoncés sont valables avec des données dans des classes de Gevrey convenables.

1. Définition des espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ pour $s\geqslant 1$.

On fait les conventions usuelles :

Pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, on note $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$; pour α et β dans $\mathbb{N}^n$, on note $\alpha\leqslant\beta$ si et seulement si l'on a $\alpha_i\leqslant\beta_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; alors on note aussi $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\dots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et un nombre réel $s\geqslant 1$; on appelle espace de Gevrey d'ordre s sur Ω , noté $G_s(\Omega)$, l'espace des fonctions u de classe C^∞ sur Ω telles que, pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe une constante $L>0$ vérifiant, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$,

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqslant L^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \quad . \tag{3.1}$$

Il est bien connu que pour $s=1$, $G_1(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques sur Ω noté aussi $\mathcal{A}(\Omega)$.

On note aussi $G_s(\bar{\Omega})$ (resp. $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$) l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ de fonctions Gevrey d'ordre s (resp. analytiques) dans un voisinage de $\bar{\Omega}$.

On remarque que dans (3.1) la norme $L^2(K)$ peut être remplacée par $L^\infty(K)$ et $\alpha!$ par $|\alpha|!$. Par ailleurs, pour un ouvert $\mathcal{O}$ assez régulier et borné on caractérise $G_s(\bar{\mathcal{O}})$ par (3.1) avec $K = \bar{\mathcal{O}}$ (on sera toujours dans une telle situation).

On rappelle le résultat :

Proposition 3.1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et Q un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients dans $G_s(\bar{\mathcal{O}})$ avec $s\geqslant 1$; pour tout $u\in G_s(\bar{\mathcal{O}})$, il existe une constante $L>0$ telle que l'on ait pour tout $i\in\mathbb{N}$,

$$\|Q^i u\|_{L^2(\mathcal{O})} \leqslant L^{i+1}(2i!)^s \quad .$$

Démonstration (cf. [1]) : L'idée consiste à montrer, par récurrence sur i, qu'il existe deux constantes L_1 et L_2 telles que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\| D^\alpha Q^i u \|_{L^2(\sigma)} \leq L_1^{|\alpha|} L_2^{i+1} ((|\alpha|+2i)!)^s .$$

On en déduit le corollaire :

Corollaire 3.1. Soient $s \geq 1$ et σ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Q un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients dans $G_s(\sigma)$; soit $u \in G_s(\sigma)$. Pour tout compact $K \subset \sigma$, il existe une constante $L>0$ telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\| Q^i u \|_{L^2(K)} \leq L^{i+1} (2i!)^s .$$

La réciproque de ce corollaire 3.1 est évidemment fausse pour un opérateur Q quelconque, mais vraie pour un opérateur elliptique (cf. [7] [8]). Nous en donnerons d'ailleurs une démonstration ci-dessous (théorème 3.1), pour une plus grande commodité de lecture de ce travail.

Introduisons maintenant quelques notations ; dans $\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}$ (avec $1 \leq k \leq n$), on considère les opérateurs différentiels, pour $1 \leq i \leq k$:

$$(3.2) \qquad R_i^m = \begin{cases} (D_{y_i} y_i D_{y_i})^\ell & \text{si } m = 2\ell \\ y_i D_{y_i} (D_{y_i} y_i . D_{y_i})^\ell & \text{si } m = 2\ell+1 . \end{cases}$$

Pour tout multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, on note :

$$R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \ldots R_k^{\alpha_k} .$$

On peut définir une classe d'espaces :

Définition 3.1. Soit $s \geq 1$; on note $\mathcal{G}_s(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ qui sont dans $G_s(\Omega)$ et telles que :

Pour tout $\underline{x} \in \Gamma$ (on prend $I(\underline{x}) = \{1, \ldots, k\}$) et pour toute carte locale $\underline{\sigma}$ (cf. remarque 1.2) au voisinage de $\underline{x}$, on ait pour

tout compact $K \subset \Omega'$ une constante L vérifiant :

$$(3.3) \qquad \| R^{\alpha} D_z^{\mu} u \|_{L^2(K)} \leqslant L^{|\alpha|+|\mu|+1} ((|\alpha|+|\mu|)!)^s ,$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^k$ et tout $\mu \in \mathbb{N}^{n-k}$.

On munit l'espace $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ de la topologie naturelle qui en fait un espace $\mathcal{LF}$.

On a évidemment, pour $1 \leqslant s \leqslant s'$, les inclusions :

$$(3.4) \begin{cases} \mathcal{A}_1(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{A}_{s'}(\bar{\Omega}) \subset C^{\infty}(\bar{\Omega}) . \\ G_s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) . \end{cases}$$

On va pouvoir préciser la description de ces espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ grâce aux inégalités de Hardy (2.12).

Proposition 3.2. Pour tout $s \geqslant 1$, on a les inclusions

$$G_s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) \subset G_{2s-1}(\bar{\Omega}) .$$

En particulier : $\mathcal{A}^1(\bar{\Omega}) = G_1(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

Démonstration : En reprenant les notations de la définition 3.1, on a dans K , pour $\alpha \in \mathbb{N}^k$ et $\mu \in \mathbb{N}^{n-k}$,

$$\| D_y^{\alpha} D_z^{\mu} u \|_{L^2(K)} \leqslant \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha!} \| R^{2\alpha} D_z^{\mu} u \|_{L^2(K)} \leqslant 2^{|\alpha|} L^{|2\alpha|+|\mu|+1} \frac{((|2\alpha|+|\mu|)!)^s}{\alpha!}$$

$$\leqslant L_1^{|\alpha|+|\mu|+1} (|\alpha|!)^{2s-1} (|\mu|!)^s$$

$$\leqslant L_1^{|\alpha|+|\mu|+1} ((|\alpha|+|\mu|)!)^{2s-1} ,$$

ce qui démontre la proposition.

2. Théorème des itérés pour un opérateur elliptique dans un ouvert.

On sait (cf. [7] et [8]) que l'on a le résultat :

Théorème 3.1. Soit Q un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients analytiques dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$; soient $s \geq 1$ et u une fonction C^∞ dans $\mathcal{O}$; les propriétés suivantes sont équivalentes

i) La fonction u est dans $G_s(\mathcal{O})$.

ii) Pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$, il existe une constante $L>0$ telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\|Q^i u\|_{L^2(K)} \leq L^{i+1} (2i!)^s . \tag{3.5}$$

Démonstration (succinte) : L'implication i) $\Longrightarrow$ ii) résulte de la proposition 3.1. Pour l'implication réciproque, on démontre que (3.5) implique en fait :

$$\|D^\alpha Q^i u\|_{L^2(K)} \leq L_1^{i+1} L_2^{|\alpha|} ((2i+|\alpha|)!)^s , \tag{3.6}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, où L_1 et L_2 sont des constantes convenables.

On peut se contenter de prendre des compacts K de la forme de boules fermées, que l'on va supposer centrées à l'origine.

Soient $0<a<1$ et $\omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x|<a\}$.

On suppose (3.5) sur un voisinage compact de $\bar{\omega}$; on en déduit d'abord (3.6) sur $\bar{\omega}$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $|\alpha| \leq 2$ en utilisant les inégalités a priori pour l'opérateur elliptique Q .

Notons pour $0<\varepsilon<a$, $\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x|<a-\varepsilon\}$ et $N_\varepsilon(u) = \|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$.

Nous avons le lemme :

Lemme 3.1. Il existe une constante C_1 (qui ne dépend que de ω et de la borne supérieure sur ω des coefficients de l'opérateur Q) telle que l'on ait pour tous $\varepsilon, \varepsilon_1$ strictement positifs, tout $v \in H^2(\omega)$ et $|\alpha| \leq 2$:

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) \leq C_1 \{N_{\varepsilon_1}(Qv) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta v) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(v)\} .$$

La démonstration de ce lemme repose sur les inégalités elliptiques

et un calcul précis de troncature.

On en déduit, par une majoration précise des commutateurs, le résultat :

Lemme 3.2. Pour tout $v \in C^\infty(\overline{\omega})$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\mu \in \mathbb{N}^n$ avec $|\mu| \leqslant 2$:

$$(3.7)\quad \left\{ \begin{aligned} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^{\alpha+\mu}v) \leqslant C_1 \{ & N_{\varepsilon_1}(D^\alpha Qv) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\gamma|=1} N_{\varepsilon_1}(D^{\alpha+\gamma}v) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(D^\alpha v) \\ & + C_1 \sum_{|\gamma|\leqslant 2} \sum_{|\beta|\geqslant 1} \binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1} (\beta!)^s N_{\varepsilon_1}(D^{\alpha-\beta+\gamma}v) . \end{aligned} \right.$$

Ensuite, on montre l'existence de deux constantes K_1 et K_2 telles que l'on ait pour tout $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $i \in \mathbb{N}$,

$$(3.8)\quad N_{|\alpha|\varepsilon}(D^\alpha Q^i u) \leqslant K_1^{|\alpha|+1} K_2^{2i} \left(\frac{(|\alpha|+2i)!\ \varepsilon^{-|\alpha|}}{|\alpha|!} \right)^s .$$

Pour cela, on part de (3.7) avec $v = Q^{i-1}u$ et $\varepsilon_1 = (|\alpha|-1)\varepsilon$; on fait une récurrence sur $|\alpha|$; on sait déjà que (3.8) est vraie pour $|\alpha| \leqslant 2$ avec K_1 et K_2 assez grands ; on montre que si on a trouvé deux constantes K_1 et K_2 qui conviennent jusqu'à l'ordre $|\alpha|-1$ et si elles sont choisies convenablement (indépendamment de α), elles conviennent aussi à l'ordre $|\alpha|$.

De (3.8) on déduit (3.6) pour le compact $K = \overline{\omega}_c$, en faisant $\varepsilon = \frac{c}{|\alpha|}$, ce qui démontre le théorème 3.1.

3. Théorèmes des itérés pour $\mathcal{A}$. Conséquences.

On suppose que l'opérateur A défini dans $\mathcal{O}$ vérifie les hypothèses (H) et est à coefficients analytiques. On a alors :

Proposition 3.3. Soient $s \geqslant 1$, K un compact de $\underline{\mathcal{O}}$ et $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}})$ et vérifiant :

Il existe $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^k$ et tout $\mu \in \mathbb{N}^{n-k}$,

$$(3.9)\quad \| R^\alpha D_z^\mu u \|_{L^2(\underline{\mathcal{O}})} \leqslant L^{|\alpha|+|\mu|+1} ((|\alpha|+|\mu|)!)^s .$$

Alors il existe $M>0$ telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\|A^k u\|_{L^2(K)} \leq M^{k+1}(2k!)^s \quad . \tag{3.10}$$

Démonstration : Soit v la fonction associée à u par (2.3). De (3.9) on déduit qu'il existe une constante $L_1>0$ telle que l'on ait pour $\alpha\in\mathbb{N}^k$ et $\mu\in\mathbb{N}^{n-k}$,

$$\|\Delta_1^{\alpha_1}\cdots\Delta_k^{\alpha_k} D_z^\mu v\|_{L^2(\tilde{\sigma})} \leq L_1^{|\alpha|+|\mu|+1}((2|\alpha|+|\mu|)!)^s \quad .$$

Il existe donc une constante $L_2>0$ telle que l'on ait :

$$\|\Delta_1+\ldots+\Delta_k+\Delta_z)^k v\|_{L^2(\tilde{\sigma})} \leq L_2^{k+1}(2k!)^s \text{ , pour tout } k\in\mathbb{N} \quad .$$

Le théorème 3.1 implique donc : $v\in G_s(\tilde{\sigma})$; la proposition 3.1 entraîne alors l'existence d'une constante $M_1>0$ telle que l'on ait pour $k\in\mathbb{N}$:

$$\|F^k v\|_{L^2(\tilde{K})} \leq M_1^{k+1}(2k!)^s$$

où $\tilde{K}$ est le transformé de K dans le changement de variables (2.2). Cela donne (3.10).

Inversement nous avons :

Proposition 3.4. Soit $u\in\mathscr{C}^\infty(\bar{\sigma})$; on suppose qu'il existe $M>0$ telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\|A^k u\|_{L^2(\sigma)} \leq M^{k+1}(2k!)^s \tag{3.11}$$

alors pour tout compact $K\subset\bar{\sigma}$, il existe $L>0$ telle que l'on ait, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^k$ et $\mu\in\mathbb{N}^{n-k}$

$$\|R^\alpha D_z^\mu u\|_{L^2(K)} \leq L^{|\alpha|+|\mu|+1}((|\alpha|+|\mu|)!)^s \quad . \tag{3.12}$$

Démonstration : Par le changement de variables (2.3) on déduit de (3.11) la majoration de $\|F^k v\|_{L^2(\tilde{\sigma})}$ qui implique (théorème 3.1) que l'on a : $v\in G_s(\tilde{\sigma})$. On en déduit l'existence d'une constante

$L_1>0$ telle que l'on ait pour $\alpha\in\mathbb{N}^k$ et $\mu\in\mathbb{N}^{n-k}$,

$$\|\Delta_1^{\alpha_1}\ldots\Delta_k^{\alpha_k} D_z^{\mu} v\|_{L^2(\widetilde{K})} \leq L_1^{|\alpha|+|\mu|+1}((2|\alpha|+|\mu|)!)^s .$$

Il en résulte (3.12).

On en déduit le résultat global suivant :

Théorème 3.2. Soient $s\geq 1$ et $u\in\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega})$ on a l'équivalence des deux conditions suivantes

i) $u\in\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$

ii) Il existe $L>0$ telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\|\mathscr{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1}(2k!)^s .$$

En particulier, dans le cas $s=1$, le théorème 3.2 donne une caractérisation des fonctions analytiques sur $\bar{\Omega}$ par les itérés de l'opérateur elliptique dégénéré $\mathscr{A}$.

Il résulte aussi du théorème 3.2 que $\mathscr{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ sur lui-même pour tout $s\geq 1$. Le cas $s=1$ redonne en particulier le corollaire 2.5. De même, nous déduisons du théorème 3.2 l'analycité sur $\bar{\Omega}$ des fonctions propres de l'opérateur $\mathscr{A}$ de domaine $D(\mathscr{A})$.

Remarque 3.1. On a vu, dans la démonstration des propositions 3.3 et 3.4, que le changement de variables (2.2) transforme localement l'espace $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ en la classe de Gevrey d'ordre s et réciproquement. Il en résulte en particulier que l'espace $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ est un anneau pour la multiplication.

-:-:-:-

IV - Théorie spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Dans ce chapitre on suppose de plus que l'opérateur $(D(\mathcal{A}),\mathcal{A})$ est auto-adjoint (c'est-à-dire en fait que la forme sesquilinéaire a définie par (1.4) est symétrique). On a déjà vu que l'injection de $D(\mathcal{A})$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (cf. Corollaire 2.2).

Donc le spectre de $\mathcal{A}$ est constitué par une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres strictement positives, que l'on ordonne dans l'ordre croissant (au sens large), et tendant vers l'infini avec j. On a besoin pour les applications d'un équivalent de λ_j quand $j \longrightarrow +\infty$. On va déterminer cet équivalent en suivant la même méthode que dans [1] avec quelques difficultés techniques dues à l'irrégularité du domaine Ω.

On choisit un entier $m>n$ (*). On désigne par $\mathcal{B}$ l'opérateur $\mathcal{A}^{2m}$ et on démontre d'abord un théorème d'inclusion d'espaces de Sobolev avec poids.

1. Théorème d'inclusion d'espaces de Sobolev avec poids.

Théorème 4.1. *L'application* $u \longmapsto \phi^{1/4}u$ *est continue de l'espace* $D(\mathcal{B}^{1/2}) = D(\mathcal{A}^m)$ *dans* $C^0(\overline{\Omega})$; *de plus il existe une constante* $C>0$ *telle que l'on ait pour tout* $u\in D(\mathcal{A}^m)$ *et tout* $t\geq 1$,

$$t^{1-n/4m}\|\phi^{1/2}u^2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\{\|\mathcal{A}^m u\|^2_{L^2(\Omega)} + t\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\}.$$

Démonstration : a) Introduisons quelques notations :
Soient $q\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ et $1\leq k\leq n$. On note

$$(4.1)\quad \begin{cases} E_0^{2q} = H^{2q}(\mathbb{R}^{n-k}) \text{ et, pour } 1\leq j\leq k, \\ E_j^{2q} = \{u\in L^2(\mathbb{R}_+^j\times\mathbb{R}^{n-k}) ; y_j \longmapsto u(y_1,\dots,y_j,z) \text{ soit dans} \\ \quad L^2(\mathbb{R}_+, E_{j-1}^{2q}) \text{ et } y_j^p D_{y_j}^{p+q} \in L^2(\mathbb{R}_+^j\times\mathbb{R}^{n-k}) \text{ pour } 0\leq p\leq q\}, \\ \quad \text{munis de la norme hilbertienne naturelle.} \end{cases}$$

(*) On pourrait se contenter de prendre $m>n/4$ mais les difficultés techniques seraient plus grandes : problèmes de traces, d'interpolation, de puissances fractionnaires de $\mathcal{A}$ ... et il n'est pas nécessaire d'avoir ici un théorème de plongement "optimal".

En particulier, il résulte de (2.8) et du théorème 2.1 que $E^{2m} = \{u \in E_k^{2m} \ ; \ \text{supp } u \subset \mathcal{O}\}$.

b) L'écriture de $D(\mathcal{A}^m)$ dans les cartes locales (cf. théorème 2.1) montre que la démonstration du théorème 4.1 se ramène à trouver une constante $C_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ et pour tout $t \geq 1$,

$$(4.2) \qquad t^{1-n/4m} \| (y_1 \dots y_k)^{1/2} u^2 \|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})} \leq C_1 \{ \|u\|^2_{E_k^{2m}} + t \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})} \} .$$

c) Par argument d'homogénéité en (y,z) , on montre qu'il suffit de démontrer (4.2) pour $t=1$, on fait ensuite un changement de variables de la forme

$$\begin{cases} y = t^{1/2m} y' , \\ z = t^{1/4m} z' . \end{cases}$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in \mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$,

$$(4.3) \qquad (y_1 \dots y_k)^{1/2} \ u^2(y,z) \|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})} \leq C_1 \| u \|^2_{E_k^{2m}} .$$

d) On va démontrer (4.3) par récurrence. Pour cela, on établit les lemmes suivants :

<u>Lemme 4.1.</u> <u>Soient</u> $1 \leq j \leq k$ <u>et</u> $q \in \mathbb{N}$; <u>pour</u> $u \in E_j^{2q}$, <u>la fonction</u>

$$y_j \longmapsto y_j^{1/4} u(y_1, \dots, y_j, z)$$

<u>est continue bornée sur</u> $[1, \infty[$, <u>à valeurs dans l'espace d'interpolation</u> $T_o^{2q}(-\frac{1}{4}, 2, E_{j-1}^{2q} ; q-\frac{1}{4}, 2, L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k}))$.(*)

On pose $v(y_1, \dots, y_j, z) = y_j^{1/4} u(y_1, \dots, y_j, z)$; on a évidemment :

$$(4.4) \qquad (y_j \longmapsto y_j^{-1/4} v(y_1, \dots, y_j, z)) \in L^2(\mathbb{R}_+, E_{j-1}^q) .$$

(*) Pour la définition et les propriétés des espaces de traces T , on renvoie à [9].

Par ailleurs :

$$(4.5)\qquad y_j^{q-\frac{1}{4}}\, D_{y_j}^{2q} v = \sum_{r=0}^{2q} \binom{2q}{r} u^{(r)} \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}-1\right)\cdots\left(\tfrac{1}{4}-2q+r+1\right) y_j^{-q+r}\, D_{y_j}^{r} u \ .$$

Comme on suppose $y_j \geqslant 1$, on vérifie que tous les termes de (4.5) sont dans $L^2(\mathbb{R}_+^j \times \mathbb{R}^{n-k})$, d'après la définition de E_j^{2q}. Donc

$$(4.6)\qquad \left(y_j \longmapsto y_j^{q-\frac{1}{4}}\, D_{y_j}^{2q} v\right) \in L^2\left([1,\infty[\ ;\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k})\right) .$$

Le lemme 4.1 est alors une conséquence de (4.4) et (4.6).

Lemme 4.2. Soient $1 \leqslant j \leqslant k$ et $q \in \mathbb{N}$. Pour $u \in E_j^{2q}$, la fonction

$$y_j \longmapsto y_j^{1/4} u(y_1, \ldots, y_j, z)$$

est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans l'espace d'interpolation $T_o^q(0,\ 2,\ E_{j-1}^{2q},\ 0,\ 2,\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k}))$.

En effet, on a immédiatement :

" $y_j \longmapsto u(y_1, \ldots, y_j, z)$ " dans $L^2((0,1), E_{j-1}^{2q})$

" $y_j \longmapsto D_{y_j}^q u(y_1, \ldots, y_j, z)$ " dans $L^2((0,1), L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k}))$.

Donc u est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans l'espace $T_o^q(0,\ 2,\ E_{j-1}^{2q},\ 0,\ 2,\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k}))$; il en est donc de même de la fonction $y_j \longmapsto y_j^{1/4} u$; ce qui démontre le lemme 4.2.

Lemme 4.3. Pour tout entier $q \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, on a

$$T_o^{2q}\left(-\tfrac{1}{4},\ 2,\ E_{j-1}^{2q},\ q-\tfrac{1}{4},\ 2,\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k})\right) \hookrightarrow E_{j-1}^{2q-2}$$

$$T_o^{q}(0,\ 2,\ E_{j-1}^{2q},\ 0,\ 2,\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k})) \hookrightarrow E_{j-1}^{2q-2} \ .$$

On peut en effet considérer E_{j-1}^2 comme le domaine d'un opérateur $\mathcal{H}$ positif dans $L^2(\mathbb{R}_+^{j-1} \times \mathbb{R}^{n-k})$ et alors $E_{j-1}^{2q} = D(\mathcal{H}^q)$.

$$T_o^{2q}(-\tfrac{1}{2},\ 2,\ E_{j-1}^{2q},\ q-\tfrac{1}{4},\ 2,\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1}\times\mathbb{R}^{n-k})) = D(\mathscr{K}^{q-\frac{1}{4}}) \quad (*)$$

$$T_o^{q}(0,\ 2,\ E_{j-1}^{2q},\ 0,\ 2,\ L^2(\mathbb{R}_+^{j-1}\times\mathbb{R}^{n-k})) = D(\mathscr{K}^{q-\frac{1}{2}})$$

et le lemme en résulte immédiatement.

Des lemmes 4.1, 4.2, 4.3, il résulte que pour $u\in E_j^{2q}$, l'application

$$y_j \longmapsto y_j^{1/4}u(y_1,\dots,y_j,z)$$

est continue bornée de $[0,\infty[$ à valeurs dans l'espace $E_{j-1}^{2(q-1)}$.

On en déduit, par récurrence, que pour $u\in E_k^{2m}$, l'application

$$y_j \longrightarrow (y_1\dots y_k)^{1/4}\ u(y,z)$$

est continue bornée de $\overline{\mathbb{R}}_+^k$ dans $E_o^{2(m-k)} = H^{2m-2k}(\mathbb{R}^{n-k})$.

Comme $m>n$, il en résulte que l'on a toujours $2m-2k>\frac{n-k}{2}$ et l'application du théorème de Sobolev usuel montre que pour $u\in E_k^{2m}$,

$$(y_1\dots y_k)^{1/4}\ u(y,z) \in L^\infty(\mathbb{R}_+^k\times\mathbb{R}^{n-k}).$$

L'inégalité (4.3) en résulte par application du théorème du graphe fermé.

Ce qui termine la démonstration du théorème 4.1.

2. Croissance des valeurs propres de $\mathscr{A}$.

On utilise maintenant les résultats déjà énoncés dans [1]. Pour plus de clarté, on rappelle brièvement l'essentiel.

Pour tout $t>0$, l'opérateur $\mathcal{B}+t$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{B})$ sur $L^2(\Omega)$. L'isomorphisme inverse est un opérateur intégral dont le noyau $G_t(x,x')$ vérifie, pour tout $f\in D(\mathcal{B})$ et tout $x\in\Omega$.

$$(4.7)\qquad f(x) = \int_\Omega G_t(x,x')(\mathcal{B}+t)\ f(x')\ dx'.$$

(*) Pour ce genre de résultats sur les espaces d'interpolation, cf. [8] et [9].

Il en résulte :

$$(4.8) \qquad G_t(x,x) = \sup_{f\in D(\mathcal{B}^{1/2})} \frac{|f(x)|^2}{\|\mathcal{A}^m f\|^2_{L^2(\Omega)} + t\|f\|^2_{L^2(\Omega)}} \ .$$

En utilisant le théorème 4.1, on en déduit :

$$(4.9) \quad \begin{cases} t^{1-n/4m}\, G_t(x,x) \leq C(\phi(x))^{-1/2} & \text{pour tout } x\in\Omega \ , \\ \text{et pour tout } t\geq 1 \ . \end{cases}$$

Par ailleurs, on sait (cf. [1]) que pour tout $x\in\Omega$,

$\lim_{t\to\infty} t^{1-n/4m}\, G_t(x,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{1+(\mathcal{A}_o(x,\xi))^{2m}}$ où $\mathcal{A}_o$ est la partie homogène de degré 2 de $\mathcal{A}$.

On note $w(x) = \int_{\{\xi;\, \mathcal{A}_o(x,\xi)<1\}} d\xi$, pour tout $x\in\Omega$; on a alors, par un changement de variables :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{1+(\mathcal{A}_o(x,\xi))^{2m}} = \frac{n\pi}{4m \sin\frac{n\pi}{4m}}\, w(x) \ .$$

Grâce à (4.9), on peut utiliser le théorème de Lebesgue et on en déduit :

$$(4.10) \qquad \lim_{t\to\infty} \left(t^{1-n/4m} \int_\Omega G_t(x,x)dx\right) = (2\pi)^{-n} \frac{n\pi}{4m \sin\frac{n\pi}{4m}} \int_\Omega w(x)\, dx \ .$$

Or le premier membre de (4.10) s'écrit encore $\lim_{t\to\infty} \left(t^{1-n/4m} \sum_{j=o}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{2m}+t}\right)$; en appliquant un théorème taubérien usuel, on obtient finalement :

Théorème 4.2. La croissance de la suite des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}$ est donnée par :

$$\lambda_j \sim 4\pi^2 \left(\int_\Omega w(x)dx\right)^{-2/n} j^{2/n} \quad \text{quand } j \longrightarrow \infty \ .$$

On remarque que cette croissance est "en $j^{2/n}$" comme pour les problèmes aux limites réguliers pour des opérateurs elliptiques non dégénérés, cf. [3][4].

-:-:-:-

V - Applications.

1. Résultats d'isomorphismes avec des espaces de suites.

On suppose dans ce paragraphe que $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est autoadjoint et que les données sont analytiques. On note (w_j) une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$ constituée par des fonctions propres de $\mathcal{A}$ associées aux valeurs propres (λ_j). Rappelons qu'il résulte du théorème 3.2 que les fonctions (w_j) sont dans $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$. On note J l'application qui à tout $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la suite (f_j) de ses coefficients de Fourier sur la base (w_j).

Pour toute suite $(P(j))$ de réels strictement positifs, on note

$$\ell^2_{P(j)} = \{(f_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \; ; \; \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 \, P(j) < +\infty\}$$

muni de sa norme hilbertienne naturelle.

On a le résultat :

Proposition 5.1. *L'application* J *est un isomorphisme de*

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad \text{sur} \quad \varprojlim_p \ell^2_{\lambda_j 2p},$$

et pour tout $s \geq 1$ *de*

$$\mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) \quad \text{sur} \quad \varinjlim_{M>0} \ell^2_{\exp(M\lambda_j^{1/2s})}.$$

Démonstration : Il est immédiat que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application J est un isomorphisme de $D(\mathcal{A}^k)$ sur $\ell^2_{\lambda_j 2k}$; il résulte alors de (2.9') que J est un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ sur $\varprojlim_p \ell^2_{\lambda_j 2p}$.

Démontrons maintenant la deuxième partie de la proposition. D'après le théorème 3.2, pour que l'on ait $u \in \mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ il faut et il suffit qu'il existe $L>0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{A}^k u\|^2_{L^2(\Omega)}}{L^{2k}(2k!)^s} < \infty,$$

c'est-à-dire en notant $(u_j) = Ju$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|u_j|^2 \lambda_j^{2p}}{L^{2p}(2p!)^{2s}} < +\infty .$$

La proposition en découle alors aisément.

De la proposition 5.1 et du théorème 4.2 il résulte :

Théorème 5.1. L'application J est un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites à décroissance rapide et, pour tout $s \geq 1$ de $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ sur l'espace $\varinjlim_{M>0} \ell^2 \exp Mj^{1/sn}$.

2. Interpolation. Approximation.

a) On se propose d'énoncer des résultats d'interpolation entre les espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ pour $s \geq 1$ et $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$.

Etant donné $1 \leq s_o \leq s < +\infty$; on sait construire (cf. [5]) un foncteur d'interpolation $\Psi_{s_o s}$ tel que

$$\Psi_{s_o s}\left[\mathcal{S}, \varinjlim_{M>0} \ell^2 \exp Mj^{1/s_o n}\right] = \varinjlim \ell^2 \exp Mj^{1/sn} . \tag{5.1}$$

En utilisant le théorème 5.1, on en déduit :

Théorème 5.2. Le foncteur $\Psi_{s_o s}$ utilisé dans (5.1) réalise :

$$\Psi_{s_o s}\left[\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}), \mathcal{A}_{s_o}(\bar{\Omega})\right] = \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) .$$

En particulier, ce théorème montre que les espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ pour $s > 1$ sont des espaces d'interpolation entre $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

Rappelons que sur une variété Γ analytique compacte sans bord on a (cf. [5])

$$\Psi_{s_o s}\left[\mathcal{C}^\infty(\Gamma), G_{s_o}(\Gamma)\right] = G_s(\Gamma) .$$

D'autre part, le théorème 5.2 a été démontré dans [1] lorsque $\bar{\Omega}$ est une variété à bord régulière. Notons que les $G_s(\bar{\Omega})$ ne sont pa

des espaces d'interpolation entre $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$.

De même on peut montrer que pour $1 \leqslant s_o \leqslant s \leqslant s_1 < +\infty$, l'espace $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ est un espace d'interpolation entre $\mathcal{A}_{s_o}(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}_{s_1}(\overline{\Omega})$.

b) Soit $\mathcal{P}_k$ l'espace des polynômes de n variables, à coefficients complexes et de degré total inférieur ou égal à k .

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note :

$$d(f,\mathcal{P}_k) = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|f-P\|_{L^2(\Omega)} .$$

Pour $s \geqslant 1$, on note :

$$\mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega}) = \{f \in L^2(\Omega) \ ; \text{ il existe } L>0 \text{ et } a \in]0,1[\text{ avec } d(f,\mathcal{P}_k) \leqslant L\, a^{k^{1/s}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}\} .$$

Il est démontré dans [2] :

$$\gamma_{1,s}[\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \mathcal{A}(\overline{\Omega})] = \mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega}) .$$

Il résulte alors du théorème 5.2 la caractérisation de l'espace $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ par l'approximation polynômiale :

<u>Théorème 5.3</u>. <u>Soit</u> $s \geqslant 1$ <u>et</u> $f \in L^2(\Omega)$, <u>pour que</u> f <u>soit dans</u> $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$, <u>il faut et il suffit qu'il existe</u> $L>0$ <u>et</u> $a \in]0,1[$ <u>vérifiant pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$

$$d(f,\mathcal{P}_k) \leqslant L\, a^{k^{1/s}} .$$

Remarquons que, d'après les propriétés d'approximation et d'interpolation, les espaces $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ sont des espaces naturels entre $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$, jouant le rôle des espaces de Gevrey sur une variété analytique sans bord.

-:-:-:-:-:-

Bibliographie.

[1] M.S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. A paraître à : Journal of Funct. Anal.

[2] M.S. Baouendi et C. Goulaouic : Approximation polynômiale de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et analytiques. Ann. Inst. Fourier 1971.

[3] F.E. Browder : Asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators. Amer. J. Math. 87 (1965) p. 175-195.

[4] L. Gårding : The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators Math. Scand. 1 (1965) p. 237-255.

[5] C. Goulaouic : Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18,1 (1968) p. 1-93.

[6] B. Hanouzet : Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre ; "Le Matematiche" vol.XXIV, fasc.2 (1969) p.450-491.

[7] T. Kotake et N.S. Narasimhan : Fractional powers of a linear elliptic operator ; Bull. Soc. Math. France, 90 (1962) p. 449-471.

[8] J.L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes tomes 1, 3 (Dunod) Paris 1970.

[9] J.L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation ; publ. Math. I.H.E.S. t.19 (1964) p. 5-63.

[10] L. Schwartz : Théorie des distributions (Hermann) Paris.

[11] H. Triebel : Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^\infty(\overline{\Omega})$ durch einen elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung ; Math. Ann. 177 (1968) p. 247-264.

ETUDE DE L'ANALYTICITE ET DE LA REGULARITE GEVREY POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES.

par

P. BOLLEY, J. CAMUS et B. HANOUZET

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier la régularité analytique et la régularité dans les classes de Gevrey pour les opérateurs elliptiques dégénérés considérés par P. BOLLEY et J. CAMUS dans [2].

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ ; on suppose de $\overline{\Omega}$ est une variété à bord analytique. On donne une fonction φ analytique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0\},$$

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\},$$

pour tout x appartenant à Γ, grad $\varphi(x) \neq 0$.

On introduit un opérateur différentiel sur Ω défini par :

$$(0.1) \qquad \mathcal{L}u = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(x,D_x)\ \{(\varphi(x))^{k-h}\ u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers, $m \geq 1$, et $P^{2m}(x,D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2m proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$.

On donne de plus une famille d'opérateurs frontières :

$$(0.2) \qquad u \longmapsto \{\mathcal{B}_1 \gamma u,\ \mathcal{B}_2 \gamma u,\ \ldots,\ \mathcal{B}_q \gamma u\} = \mathcal{B}\gamma u.$$

On montre ici que, sous certaines conditions sur $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$, si u est une fonction assez régulière telle que $\mathcal{L}u$ soit analytique sur ω, $\mathcal{B}_1 \gamma u$ soit analytique sur $\omega \cap \Gamma$, où ω est un ouvert de $\overline{\Omega}$, alors, u est analytique sur ω. Plus généralement, on démontre la même propriété dans les classes de Gevrey d'ordre s, $s \geq 1$.

Si $\overline{\omega}$ est contenu dans Ω, le résultat est classique (voir [3] par exemple), le problème est donc l'étude de la régularité au bord.

La méthode d'étude est une adaptation de celle de Morrey et Nirenberg [4], déjà utilisée par M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [1] pour un opérateur dégénéré d'ordre deux. On rencontre quelques difficultés techniques supplémentaires dues à la présence des opérateurs frontières (0,2) qui font intervenir des "traces généralisées". D'autre part, la forme générale de $\mathcal{L}$ nécessite l'utilisation d'inégalités a priori d'ordre élevé alors que dans [1] les inégalités avec second membre dans $L^2(\Omega)$ suffisent. Ces inégalités a priori permettent d'obtenir la majoration des dérivées presque tangentielles, c'est-à-dire d'ordre fini, suivant la direction normale. Puis, en fixant l'ordre des inégalités utilisées, cet ordre étant choisi suffisamment grand, par des inégalités de Hardy et une récurrence d'un type particulier, on majore toutes les dérivées en utilisant l'équation (0.1).

Le plan suivi est :

I - Notations et premières propriétés.

II - Transformation des inégalités a priori.

III - Majoration des dérivées presque tangentielles.

IV - Majoration de toutes les dérivées.

V - Conclusions.

I - NOTATIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

Dans toute la suite, on s'intéresse au problème localisé dans $\mathbb{R}^n_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \; ; \; y > o\}$. Pour l'essentiel des propriétés énoncées, on renvoie à [2].

1°) Les opérateurs.

Soient k et m deux entiers vérifiant $k \geq o$, $m \geq 1$, L l'opérateur différentiel défini sur $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ par :

$$(I.1) \qquad L(x,y,D_x,D_y) = \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(x,y,D_x,D_y)\,(y^{k-h}u)$$

où P^{2m-h} est un opérateur différentiel à coefficients réguliers d'ordre $\leq 2m-h$, d'ordre égal à $2m$ quand $h = o$: $P^{2m-h} = \sum_{|\alpha| \leq 2m-h} p_\alpha^{2m-h} D^\alpha$.

Soit p un entier positif fixé pour toute la suite ; on associe à p une famille de χ_p ($\chi_p \geq o$) opérateurs frontières $\{B_j \; \gamma\}_{j=1,\ldots,\chi_p}$ définis par :

$$(I.2) \qquad B_j(x,D_x)\,\gamma u = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}(x,D_x)\,\gamma_q u,$$

où

i) $B_{jq}(x,D_x)$ est un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^{n-1}$ à coefficients réguliers, l'ordre de B_{jq} est $m_j - q$ avec $-k \leq q \leq 2m + p - k - 1$, $-k \leq m_j \leq 2m + p - k - 1$. (si $m_j - q < o$, B_{jq} est identiquement nul).

ii) γ_q est l'opérateur trace généralisée (voir [5]) défini par :

$$(I.3) \qquad \gamma_q u = \begin{cases} D_y^q u\,(x,o) \text{ pour } q \geq o \\ (-1)^{q-1} \displaystyle\int_o^{+\infty} y^{-q-1}\,\chi(y)\,u(x,y)\,dy \text{ pour } q < o \end{cases}$$

où χ est une fonction de classe C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ vérifiant $0 \leq \chi(y) \leq 1$, $\chi(y) \equiv 1$ sur un voisinage de l'origine. Dans la suite, on supposera que le support de χ est suffisamment petit.

Remarque : pour certains entiers p, on prendra $\chi_p = 0$; dans ce cas, la famille d'opérateurs frontières est vide, c'est par exemple le cas étudié dans [1].

2°) Les espaces.

Pour s nombre réel, on désigne par $H^s(\Omega)$ les espaces de Sobolev usuels sur un ouvert Ω (voir [3] par exemple).

Pour ℓ et k entiers, on pose :

$$(I.4) \qquad W_k^\ell(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{\ell-k}(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ y^k u \in H^\ell(\mathbb{R}^n_+)\}.$$

On a aussi :

$$(I.4') \qquad W_k^\ell(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{\ell-k}(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ y^j u \in H^{\ell-j}(\mathbb{R}^n_+),\ j=1,\dots,k\}.$$

On munit ces espaces de la norme naturelle.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ (*) est dense dans $W_k^\ell(\mathbb{R}^n_+)$, en utilisant des inégalités de Hardy, on obtient une nouvelle caractérisation des espaces $W_k^\ell(\mathbb{R}^n_+)$:

Proposition I.1.

$W_k^\ell(\mathbb{R}^n_+)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec le complété de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour la norme :

$$u \longmapsto \|y^k u\|_{H^\ell(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Ce résultat découle des inégalités suivantes (voir [1]) :

pour i et j entiers positifs ou nuls, $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on a :

$$(I.5) \qquad \|D_y^i u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \left[\left(i+\tfrac{1}{2}\right) \dots \left(i+j-\tfrac{1}{2}\right)\right]^{-1} \|D_y^{i+j}(y^j u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

Remarque : les inégalités (I.5) sont valables dans un cadre bien plus général. Par exemple, elles subsistent si on remplace $\mathbb{R}^n_+$ par $\omega' \times]0,a[$ où ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

(*) $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ désigne l'espace des restrictions à $\mathbb{R}^n_+$ des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$.

Nous aurons aussi besoin d'un résultat sur les traces généralisées :

(I.6) $\begin{cases} \text{pour } -k \leq q \leq \ell-k-1, \ \gamma_q \text{ est un opérateur linéaire continu de} \\ W_k^{\ell}(\mathbb{R}^n_+) \text{ dans } H^{\ell-k-q-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}). \end{cases}$

3°) Résultat de majoration a priori.

Nous supposons que l'opérateur L, l'entier p, les opérateurs frontières $\{B_j\}_{j=1,\ldots,\chi_p}$ sont tels que :

- pour tout entier $r \geq p$ il existe une constante $C_r > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ à support suffisamment petit contenu dans un voisinage de l'origine, on ait :

$$\|u\|_{W_k^{2m+r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_r \{ \|Lu\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|B_j \gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_k^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \}$$

En utilisant la proposition I.1, cette inégalité devient, avec une nouvelle constante C_r :

$$\|y^k u\|_{H^{2m+r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_r \{ \|Lu\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|B_j \gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|y^k u\|_{H^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \}$$

Dans la deuxième partie, nous allons transformer cette inégalité en supposant de plus que les coefficients de L et de B sont dans des classes de Gevrey. Rappelons que, si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, s un nombre réel ≥ 1, on appelle espace de Gevrey d'ordre s sur K, l'espace $G_s(K)$ des fonctions u de classe C^∞ sur K à valeurs complexes telles qu'il existe une constante $L > 0$ avec :

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} L^{-|\alpha|} (|\alpha|!)^{-s} \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} < +\infty$$

Si Ω est un ouvert, $G_s(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ sur Ω qui sont de classe de Gevrey d'ordre s sur tout compact contenu dans Ω. Pour s=1, on obtient les fonctions analytiques. On peut aussi définir ces espace en utilisant les normes L^∞.

II - TRANSFORMATION DES INEGALITES A PRIORI.

Soient a et b deux nombres réels fixés, $0 < b < a$, ω' un ouvert voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $\omega = \omega' \times [0,a[$ le cylindre associé.

Pour $0 < \varepsilon < a$ on pose :

$$\omega'_\varepsilon = \{x \in \omega' \mid d(x,\partial\omega') > \varepsilon\} ,$$

$$\omega_\varepsilon = \omega'_\varepsilon \times [0,a-\varepsilon[,$$

$$N'_\varepsilon(v) = \|v\|_{L^2(\omega'_\varepsilon)}$$

$$N_\varepsilon(u) = \|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$$

Nous supposons que les coefficients des opérateurs sont dans des classes de Gevrey d'ordre s, plus précisément :

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} \exists K_1 > 0 \mid \forall \gamma \in \mathbb{N}^n \\ \sup\limits_{p \text{ coefficient de } L} \|D^\gamma p\|_{L^\infty(\omega)} \leq K_1^{|\gamma|+1} (|\gamma|!)^s \end{cases}$$

$$\text{(II.2)} \quad \begin{cases} \exists K_2 > 0 \mid \forall \gamma' \in \mathbb{N}^{n-1} \\ \sup\limits_{b \text{ coefficient de } B} \|D^{\gamma'} b\|_{L^\infty(\omega')} \leq K_2^{|\gamma'|+1} (|\gamma'|!)^s \end{cases}$$

Dans la suite, on choisira $K = K_1 = K_2$.

On suppose aussi que la fonction χ intervenant dans (I.3) est telle que :

$$\text{(II.3)} \quad \text{supp } \chi \subset [0,b[.$$

En supposant que (I.7) est valable dès que supp $u \subset \omega$, en utilisant la méthode "d'ouverts emboités" de Morrey et Nirenberg, on se propose d'obtenir une majoration valable pour le support de u quelconque.

(II.4)
$$\begin{cases} \text{Soient } \varepsilon > 0,\ \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon + \varepsilon_1 < a-b,\ (x,y) \longrightarrow \psi(x,y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y) \\ \text{une fonction de } \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon_1}) \text{ telle que } \psi \equiv 1 \text{ sur } \omega_{\varepsilon+\varepsilon_1} \text{ et} \\ \|D_x^\gamma \psi_1\|_{L^\infty(\omega')} \leq C_1\, \varepsilon^{-|\gamma|} \text{ pour tout } \gamma \in \mathbb{N}^{n-1}, \\ \|D_y^\nu \psi_2\|_{L^\infty(0,a)} \leq C_1\, \varepsilon^{-\nu} \text{ pour tout } \nu \in \mathbb{N}, \\ \text{la constante } C_1 \text{ ne dépendant pas de } \varepsilon \text{ et } \varepsilon_1 . \end{cases}$$

Pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ on applique (I.7) à ψu, on obtient une première majoration :

Lemme II.1.

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, *il existe une constante* $C_2 > 0$ *dépendant des coefficients de* L, *de* B *et de l'entier* $r \geq p$ *telle que :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon + \varepsilon_1 < a-b,$$
$$\forall\, \nu \in \mathbb{N}^n,\ |\nu| \leq 2m + r,$$

on ait :

(II.5)
$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\nu y^k u) \leq C_2 \Big\{ \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}(D^\beta Lu) + \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}(D^\beta y^k u) + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|\psi_1 B_j \gamma(\psi_2 u)\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac12}(\mathbb{R}^{n-1})} \Big\}$$

Démonstration :

En utilisant (I.7) et les propriétés de ψ, on obtient :

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\nu y^k u) \leq \|y^k \psi u\|_{H^{2m+r}(\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1})} \leq \|(y^k \psi u)\|_{H^{2m+r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq$$
$$C_r \Big\{ \|L\psi u\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|B_j \gamma \psi u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac12}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|y^k \psi u\|_{H^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \Big\}.$$

Dans la suite, C désignera une constante dépendant de L, B, r mais qui peut varier à chaque étape. On a tout d'abord :

$$\|y^k \psi\, u\|_{H^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq$$

$$C \sum_{|\alpha| \leq 2m+r-1} \sum_{\beta \leq \alpha} \|D^{\alpha-\beta}\psi\|_{L^\infty} N_{\varepsilon_1}(D^\beta y^k u)$$

$$\leq C \sum_{|\beta| \leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\beta y^k u)$$

On a ensuite :

$$\|L\psi\, u\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|\psi Lu\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \|[L,\psi]\, u\|^{(*)}_{H^r(\mathbb{R}^n_+)}$$

On obtient directement :

$$\|\psi Lu\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \sum_{|\beta| \leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\beta Lu),$$

et en utilisant les inégalités de Hardy (I.5) :

$$\|[L,\psi]\, u\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \sum_{|\beta| \leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\beta y^k u)$$

Reste à majorer les termes faisant intervenir les opérateurs frontières :

$$\|B_j \gamma \psi\, u\|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq$$

$$\|\psi_1 B_j \gamma \psi_2\, u\|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$

$$\sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \|\gamma_q [B_{jq}, \psi_1]\, \psi_2 u\|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Par I.6 et la proposition I.1, on obtient :

(*) $[L,\psi]u$ désigne le commutateur de L et ψ :

$$[L,\psi]u = L\psi\, u - \psi\, L\, u.$$

$$\| \gamma_q \, [B_{jq} \, , \, \psi_1] \, \psi_2 u \|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq$$

$$C \, \| [B_{jq} \, , \, \psi_1] \, \psi_2 \, u \|_{W_k^{2m+r+q-m_j}(\mathbb{R}^n_+)} \leq$$

$$C \, \| [B_{jq} \, , \, \psi_1] \, \psi_2 \, y^k u \|_{H^{2m+r+q-m_j}(\mathbb{R}^n_+)}$$

Comme l'opérateur $[B_{jq}, \psi_1]$ est d'ordre $m_j - q - 1$, ce dernier terme est majoré par une expression du type :

$$C \sum_{|\beta| \leq 2m+r-1} \varepsilon^{-(2m+r)+|\beta|} \, N_{\varepsilon_1} (D^\beta (y^k u)).$$

En rassemblant les inégalités précédentes, on obtient (II.5). Nous allons obtenir de nouvelles inégalités en remplaçant u par $D_x^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, dans (II.5).

Lemme II.2.

Soit $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, *il existe une constante* $C_3 > 0$, *dépendant de* L, B, r, $r \geq p$, *telle que :*

$\forall \, \varepsilon > 0$, $\forall \, \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon + \varepsilon_1 < a - b$,

$\forall \, \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\forall \, \nu \in \mathbb{N}^n$, $|\nu| \leq 2m + r$,

on ait :

(II.6)

$$C_3^{-1} \, N_{\varepsilon+\varepsilon_1} (D_x^\alpha D^\nu y^k u) \leq$$

$$\sum_{|\beta| \leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|} \, N_{\varepsilon_1} (D_x^\alpha D^\beta L u) +$$

$$\sum_{|\beta| \leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|} \, N_{\varepsilon_1} (D_x^\alpha D^\beta y^k u) +$$

$$\sum_{|\beta| \leq r} \; \sum_{|\delta| \leq 2m} \varepsilon^{-r+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'| \neq 0}} \; \sum_{\beta' \leq \beta}$$

$$\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} (([|\alpha'|+|\beta'|])!)^s N_{\varepsilon_1}(D^{\delta+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'} y^k u) +$$

$$\sum_{j=1}^{\chi_P} \sum_{\substack{|\beta|\le 2m+r-k-m_j \\ \beta\in\mathbb{N}^{n-1}}} \varepsilon^{-(2m+r-k-m_j)+|\beta|} N'_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha+\beta} B_j \gamma u) +$$

$$\sum_{j=1}^{\chi_P} \sum_{q=-\infty}^{2m+p-k-1} \sum_{|\mu|\le m_j-q} \sum_{\substack{\alpha'\le\alpha \\ |\alpha'|\neq 0}} \sum_{|\beta|\le 2m+r-m_j+q} \sum_{\beta'\le\beta} \sum_{\delta\le\beta-\beta'}$$

$$\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} (([|\alpha'|+|\beta'|])!)^s \binom{\beta-\beta'}{\delta} \varepsilon^{-|\delta|} \times$$

$$N_{\varepsilon_1}(D_x^{\mu+\alpha-\alpha'} D^{\beta-\beta'-\delta} y^k u).$$

Démonstration :

Par (II.5), on a :

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\nu D_x^\alpha y^k u) \le C_2 \Big\{ \sum_{|\beta|\le r} \varepsilon^{-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\beta Lu)$$

$$+ \sum_{|\beta|\le r} \varepsilon^{-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\beta [L, D_x^\alpha] u) +$$

$$\sum_{|\beta|\le 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\beta y^k u) +$$

$$\sum_{j=1}^{\chi_P} \| \psi_1 B_j \gamma (\psi_2 D_x^\alpha u) \|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \Big\}.$$

Il nous faut estimer le deuxième terme et le quatrième terme du second membre de cette inégalité.

1) Etudions le deuxième terme. On a :

$$N_{\varepsilon_1}(D^\beta [L, D_x^\alpha] u) \le \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{|\gamma|\le 2m-h} \sum_{\beta'\le\beta} \sum_{\substack{\alpha'\le\alpha \\ |\alpha'|\neq 0}}$$

$$\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} \| D_x^{\alpha'} D^{\beta'} p_\gamma^{2m-h} \|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D^{\gamma+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'} y^{k-h} u).$$

En appliquant (II.1) et (I.5), on obtient :

$$\| D_x^{\alpha'} D^{\beta'} p_\gamma^{2m-h} \|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1} (D^{\gamma+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'} y^{k-h} u)$$

$$\leq C K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} ((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s N_{\varepsilon_1} (D_y^h D^{\gamma+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'} y^k u)$$

Comme $h + |\gamma| \leq 2m$, en reportant on obtient :

$$N_{\varepsilon_1} (D^\beta [L, D_x^\alpha] u) \leq C \sum_{|\delta| \leq 2m} \sum_{\beta' \leq \beta} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'| \neq 0}} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} ((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s N_{\varepsilon_1} (D^{\delta+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'} y^k u).$$

2) Etudions le quatrième terme. On a :

$$\psi_1 B_j \gamma(\psi_2 D_x^\alpha u) = \psi_1 D_x^\alpha B_j \gamma u + \psi_1 [B_j , D_x^\alpha] \gamma \psi_2 u.$$

i) On majore grossièrement le premier terme :

$$\| \psi_1 D_x^\alpha B_j \gamma u \|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \| \psi_1 D_x^\alpha B_j \gamma u \|_{H^{2m+r-k-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \sum_{|\beta| \leq 2m+r-k-m_j} \varepsilon^{-(2m+r-k-m_j)+|\beta|} N'_{\varepsilon_1} (D_x^{\beta+\alpha} B_j \gamma u).$$

ii) Le commutateur $[B_j, D_x^\alpha]$ est de la forme :

$$[B_j, D_x^\alpha] = - \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \sum_{|\mu| \leq m_j - q} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'| \neq 0}} \binom{\alpha}{\alpha'} (D_x^{\alpha'} b_{jq}^\mu) (D_x^{\mu+\alpha-\alpha'})$$

En utilisant (I.6), la proposition I.1, (II.2), (II.4), on obtient :

$$\| \gamma_q \psi_1 (D_x^{\alpha'} b_{jq}^\mu) (D_x^{\mu+\alpha-\alpha'} \psi_2 u) \|_{H^{2m+r-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \sum_{|\beta| \leq 2m+r-m_j+q} \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} ((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s$$

$$\sum_{\delta \leq \beta - \beta'} \binom{\beta-\beta'}{\delta} \varepsilon^{-\delta} N_{\varepsilon_1} (D_x^{\mu+\alpha-\alpha'} D^{\beta-\beta'-\delta} y^k u).$$

En reportant les majorations obtenues aux 1) et 2), on obtient (II.6)

III - MAJORATION DES DERIVEES PRESQUE TANGENTIELLES.

On suppose dans cette partie que u est une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{\omega}$, que Lu est de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\omega}$, que $B_j \gamma u$, $j=1,\dots,p$, est de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\omega'}$. Nous traduisons ces dernières hypothèses par les relations suivantes :

$$(III.1) \quad \exists K_3 > 0 \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \|D^\alpha Lu\|_{L^2(\omega)} \leq K_3^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s$$

$$(III.2) \quad \exists K_4 > 0 \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \|D_x^\alpha B_j \gamma u\|_{L^2(\omega')} \leq K_4^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s$$

On choisira $K = K_3 = K_4$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on dit qu'une dérivation D^α est presque tangentielle si $\alpha_n \leq 2m+r$.

Les hypothèses (III.1), (III.2) et le lemme II.2 conduisent à une majoration des dérivées presque tangentielles de $y^k u$.

Lemme III.1.

Soit r un entier $\geq p$, *il existe une constante* M(r) *telle que, pour toute dérivation presque tangentielle* $D^{\alpha'}$ *et tout* ε *vérifiant* $0 < \varepsilon \leq \frac{a-b}{|\alpha'|}$ *on ait :*

$$(III.3) \quad N_{|\alpha'|\varepsilon} (D^{\alpha'}(y^k u)) \leq M^{|\alpha'|+1} \varepsilon^{-|\alpha'|s} .$$

Pour plus de commodité, on supposera dans la suite que a-b < 1 mais cette hypothèse pourrait être écartée.

Démonstration :

On fait une récurrence sur l'entier $j = |\alpha'|$. On démontre qu'on peut choisir la constante M indépendamment de j de telle sorte que, si (III.3) est vraie pour $|\alpha'| \leq j$ alors (III.3) reste vraie pour $|\alpha'| \leq j+1$.

Supposons donc que (III.3) est vraie jusqu'à l'ordre j ; soit $\alpha' \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha'| = j+1$, posons $\alpha' = \alpha+\nu$ avec $|\nu| = 2m+r$ donc $|\alpha| = j+1-2m-r$.

On applique les résultats du lemme II.2 avec $0 < \varepsilon \leq \frac{a-b}{j+1}$. $\varepsilon_1 = j\,\varepsilon$. On a :

$$C_3^{-1}\, N_{(j+1)\varepsilon}\,(D_x^\alpha D^\nu y^k u) \leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

où A_i désigne le $i^{ème}$ terme intervenant dans le deuxième membre de (II.6). Nous majorons séparément chacune des expressions A_i , i=1,...,5. Dans la suite, on désigne par C des constantes positives qui peuvent changer d'une étape de calcul à la suivante mais qui restent indépendantes de j.

1) $$A_1\, M^{-j-2}\, \varepsilon^{(j+1)s} \leq \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|+(j+1)s}\, M^{-j-2}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\alpha D^\beta Lu).$$

En utilisant (III.1) et $\varepsilon < (j+1)^{-1}$ on obtient

$$A_1\, M^{-j-2}\, \varepsilon^{(j+1)s} \leq$$

$$\sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{2ms}\,(j+1)^{-(j+1-2m-r+|\beta|)s}\; M^{-j-2}\, K^{j+2-2m-r+|\beta|}((j+1-2m-r+|\beta|)!)^s$$

ce qui donne

(III.4) $$A_1\, M^{-j-2}\, \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\,(K M^{-1})^{j+2}.$$

2) $$A_2\, M^{-j-2}\, \varepsilon^{(j+1)s} \leq$$

$$\sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|+(j+1)s}\, M^{-j-2}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\alpha D^\beta y^k u).$$

$D_x^\alpha D^\beta$ est une dérivée presque tangentielle et comme $|\alpha| + |\beta| \leq j$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence.

$$A_2\, M^{-j-2}\, \varepsilon^{(j+1)s} \leq \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1}$$

$$\varepsilon^{(-2m-r+|\beta|+j+1)s}\; M^{-j-2}\, M^{j+2-2m-r+|\beta|}\, \varepsilon^{-(j+1-2m-r+|\beta|)}$$

Après réduction, on obtient :

(III.5) $$A_2\, M^{-j-2}\, \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\, M^{-1}$$

3) $$A_3\, \varepsilon^{(j+1)s}\, M^{-j-2} \leq$$

$$\sum_{|\beta|\leq r}\ \sum_{|\delta|\leq 2m} \varepsilon^{-r+|\beta|+(j+1)s}\; M^{-j-2} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'|\neq 0}}\ \sum_{\beta' \leq \beta}$$

$$\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} (|\alpha'|+|\beta'|)!)^s N_{\varepsilon_1} (D^{\delta+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'} y^k u).$$

Comme $|\delta+\beta-\beta'| \leq 2m+r$, $D^{\delta+\beta-\beta'} D_x^{\alpha-\alpha'}$ est une dérivée presque tangentielle et comme $|\delta+\beta-\beta'+\alpha-\alpha'| \leq j$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

En utilisant d'autre part que :

$$\binom{|\alpha|}{|\alpha'|}\binom{|\beta|}{|\beta'|} (|\alpha'|+|\beta'|)! \varepsilon^{|\alpha'|+|\beta'|} \leq 2^{|\alpha'|+|\beta'|}$$

on obtient :

$$A_3 \varepsilon^{(j+1)s} M^{-j-2} \leq \sum_{|\beta|\leq r} \sum_{|\delta|\leq 2m} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'|\neq 0}} \sum_{\beta' \leq \beta} K(2^s KM^{-1})^{|\alpha'|+|\beta'|} \varepsilon^{(j+1-r-|\delta|-|\alpha|)s} M^{-j-2+|\delta|+|\beta|+|\alpha|+1}$$

Comme $\quad j+1-r-|\delta|-|\alpha| \geq 0$ et $-j-2+|\delta|+|\beta|+|\alpha|+1 \leq 0$,

en supposant $2^s KM^{-1} < 1$, on obtient :

$$A_3 \varepsilon^{(j+1)s} M^{-j-2} \leq C \sum_{|\beta|\leq r} \sum_{\beta' \leq \beta} (2^s KM^{-1})^{|\beta'|} \sum_{|\alpha'|\geq 1} (2^s KM^{-1})^{|\alpha'|}$$

Ce que fournit enfin :

(III.6) $$\begin{cases} \text{Pour } 2^{s_n} KM^{-1} < 1, \\ A_3 \varepsilon^{(j+1)s} M^{-j-2} \leq C \dfrac{2^{s_n} KM^{-1}}{1-2^{s_n} KM^{-1}} \end{cases}$$

4) $$A_4 \varepsilon^{(j+1)s} M^{-j-2} \leq \sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{\substack{|\beta|\leq 2m+r-k-m_i \\ \beta \in N^{n-1}}} \varepsilon^{-(2m+r-k-m_i)+|\beta|+(j+1)s} M^{-j-2} N'_{\varepsilon_1} (D_x^{\alpha+\ell} B_i \gamma u)$$

En utilisant (III.2) et $(j+1)\varepsilon < 1$, on obtient comme au 1) :

(III.7) $$A_4 \varepsilon^{(j+1)s} M^{-j-2} < C (KM^{-1})^{j+2}.$$

5) $$A_5 \varepsilon^{(j+1)s} M^{-j-2} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \sum_{|u|\leq m_i-q} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'|\neq 0}} \sum_{|\beta|\leq 2m+r-m_j+q} \sum_{\beta' \leq \beta} \sum_{\delta \leq \beta-\beta'}$$

$$\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}\varepsilon^{(|\alpha'|+|\beta'|)s}\,((|\alpha'|+|\beta'|)!)^{s}\,K^{|\alpha'|+|\beta'|+1}\,M^{-j-2}$$

$$\binom{\beta-\beta'}{\delta}\varepsilon^{(j+1-|\alpha'|-|\beta'|)s-|\delta|}\,N_{\varepsilon_1}(D_x^{\mu+\alpha-\alpha'}D^{\beta-\beta'-\delta}y^k u).$$

Comme $|\beta-\beta'-\delta| \leq 2m+r$ et $|\mu+\alpha-\alpha' + \beta-\beta' - \delta| \leq j$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On obtient comme au 3) :

$$\text{(III.8)}\quad \begin{cases} \text{Pour } 2^s n\,KM^{-1} < 1 \\ A_5\,\varepsilon^{(j+1)s}\,M^{-j-2} < C\,\dfrac{2^s n\,KM^{-1}}{1-2^s n\,KM^{-1}}\,. \end{cases}$$

En regroupant les inégalités (III,4,5,6,7,8) on obtient enfin, pour $2^s n\,KM^{-1} < 1$

$$C_3^{-1}(N_{(j+1)\varepsilon}(D_x^{\alpha}D^{\nu}y^k u))\,\varepsilon^{(j+1)s}\,M^{-j-2} \leq$$

$$C\,\{(KM^{-1})^{j+2} + M^{-1} + \frac{2^s n\,KM^{-1}}{1-2^s n\,KM^{-1}}\}\,.$$

Cette inégalité montre qu'on peut choisir M grand vis à vis de K, indépendamment de j, pour que :

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D_x^{\alpha}D^{\nu}y^k u) \leq M^{j+2}\,\varepsilon^{-(j+1)s}$$

qui est la relation (III.3) à l'ordre j+1.

Le lemme III.1 permet d'obtenir une majoration des dérivées presque tangentielles de $y^k u$ sur tout compact $\mathcal{K}$ contenu dans ω. On choisit b tel que $\mathcal{K} \subset \omega_{a-b} = \omega'_{a-b} \times [0,b[$. On obtient le résultat suivant :

Proposition III.1.

Sous les hypothèses (I.7), (II.1), (II.2), (II.3), (III.1), (III.2), il existe une constante N, qui dépend de l'entier $r \geq p$, telle que, pour toute dérivée presque tangentielle on ait :

$$\text{(III.9)}\qquad \|D^{\alpha'}(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \leq N^{|\alpha'|+1}\,(|\alpha'|!)^{s}\,.$$

Démonstration :

Dans (III.3), on prend $\varepsilon = \dfrac{a-b}{|\alpha'|}$. On obtient (III.9) en utilisant la formule de Stirling.

IV - MAJORATION DE TOUTES LES DERIVEES.

On se propose d'obtenir des majorations du type (III.9) pour toutes les dérivées de $y^k u$. On isole dans Lu le terme de dérivation maximum en y, en supposant que ce terme a pour coefficient 1 :

$$p^{2m}_{(o,o,\dots,o,2m)}(x,y) = 1. \tag{IV.1}$$

On obtient l'identité :

$$D_y^{2m}(y^k u) = Lu - \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\le 2m-h \\ \lambda_n \neq 2m}} p_\lambda^{2m-h}(x,y)\, D^\lambda\, y^{k-h}\, u. \tag{IV.2}$$

On obtient le résultat suivant :

Proposition IV.1.

Sous les hypothèses (I.7), (II.1), (II.2), (II.3), (III.1), (III.2), il existe deux constantes $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $\alpha_n \in \mathbb{N}^n$ on ait :

$$\| D_x^\alpha D_y^{\alpha_n}(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \le M_1^{|\alpha|+1} M_2^{\alpha_n} (|\alpha|+\alpha_n)!)^s. \tag{IV.3}$$

Démonstration :

On sait, d'après la proposition III.1, que (IV.3) est vrai pour α quelconque, $\alpha_n \le 2m+r$, les constantes dépendant de r. On fixe un entier r_o, $r_o \ge p$, de telle sorte que :

$$\left| 1 - \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \left[(2m-h+r_o+\tfrac{1}{2}) \dots (2m+r_o-\tfrac{1}{2}) \right]^{-1} \| p^{2m-h}_{o,\dots,o,2m-h} \|_{L^\infty(\omega)} \right| \ge \frac{1}{2} \tag{IV.4}$$

En appliquant aux deux membres de (IV.2) la dérivation $D_x^\alpha D_y^{r+1}$, on obtient :

$$D_x^\alpha D_y^{2m+r+1}(y^k u) = D_x^\alpha D_y^{r+1}(Lu)$$
$$- \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\le 2m-h \\ \lambda_n \neq 2m}} \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \rho \le r+1}} \binom{(\alpha,r+1)}{(\beta,\rho)} \times$$
$$D_x^\beta D_y^\rho (P_\lambda^{2m-h})\, D_x^{\alpha-\beta} D_y^{r+1-\rho} D^\lambda (y^{k-h} u).$$

En isolant les termes de dérivation maximum en y, on obtient :

$$\|D_x^\alpha D_y^{2m+r+1}(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \le \|D_x^\alpha D_y^{r+1}(Lu)\|_{L^2(\omega_{a-b})} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \|P^{2m-h}_{(o,\dots,o,2m-h)}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} \|D_x^\alpha D_y^{r+1+2m-h}(y^{k-h}u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} +$$

$$\sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \rho\le r+1 \\ |\beta|+\rho\neq 0}} \binom{(\alpha,r+1)}{(\beta,\rho)} \|D_x^\alpha D_y^\rho P^{2m-h}_{o,\dots,o2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})}$$

$$\times \|D_x^{\alpha-\beta} D_y^{r+1-\rho+2m-h}(y^{k-h}u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} +$$

$$\sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\le 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta\le\alpha,\ \rho\le r+1} \|D_x^\alpha D_y^\rho P_\lambda^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})}$$

$$\times \|D_x^{\alpha-\beta} D_y^{r+1-\rho} D^\lambda (y^{k-h}u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} .$$

En appliquant à chacun des termes les inégalités (I.5) et par (IV.4), on obtient, pour $r \ge r_o$.

(IV.5)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|D_x^\alpha D_y^{2m+r+1}(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \le \|D_x^\alpha D_y^{r+1}(Lu)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \\ + \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \rho\le r+1 \\ |\beta|+\rho\neq 0}} \binom{(\alpha,r+1)}{(\beta,\rho)} \|D_x^\beta D_y^\rho (P^{2m-h}_{o,\dots,o,2m-h})\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} \times \\ ((r-\rho+2m-h+\frac{3}{2})\dots(r-\rho+2m+\frac{1}{2}))^{-1} \|D_x^{\alpha-\beta} D_y^{r+1-\rho+2m}(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \\ + \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\lambda=(\lambda',\lambda_n) \\ |\lambda|\le 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta\le\alpha,\ \rho\le r+1} \binom{(\alpha,r+1)}{(\beta,\rho)} \|D_x^\beta D_y^\rho P_\lambda^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} \times \\ ((r-\rho+\lambda_n+\frac{3}{2})\dots(r-\rho+\lambda_n+h+\frac{1}{2}))^{-1} \|D_x^{\alpha-\beta+\lambda'} D_y^{r+1-\rho+\lambda_n+h}(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \end{cases}$$

A partir de cette inégalité, on démontre (IV.3) par une récurrence en deux étapes :

i) première étape : on suppose que (IV.3) est vrai quelque soit α et pour $\alpha_n \leq 2m+r$ $(r \geq r_0)$; on démontre qu'on peut choisir les constantes M_1 et M_2, indépendamment de r, pour que (IV.3) reste valable pour $\alpha = 0$, $\alpha_n = 2m+r+1$.

ii) deuxième étape : on suppose de plus que (IV.3) est vrai pour $|\alpha| \leq j$, $\alpha_n \leq 2m+r+1$; on démontre que l'on peut choisir les constantes M_1 et M_2, indépendamment de j, pour que (IV.3) reste valable pour $|\alpha| = j+1$, $\alpha_n \leq 2m + r + 1$.

Première étape de la récurrence.

En utilisant (II.1) et (III.1) écrivons (IV.5) pour $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{2}\left\|D_y^{2m+r+1}\,(y^k u)\right\|_{L^2(\omega_{a-b})} \leq K^{r+2}\,((r+1)!)^s +$$

$$\sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{1\leq\rho\leq r+1} \binom{r+1}{\rho} K^{\rho+1}\,(\rho!)^s \times$$

$$((r-\rho+2m-h+\tfrac{3}{2})\ldots(r-\rho+2m+\tfrac{1}{2}))^{-1}\left\|D_y^{r+1-\rho+2m}\,(y^k u)\right\|_{L^2(\omega_{a-b})} + \qquad \text{(IV.6)}$$

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\lambda=(\lambda',\lambda_n)\\ |\lambda|\leq 2m-h\\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\rho\leq r+1} \binom{r+1}{\rho} K^{\rho+1}\,(\rho!)^s \times$$

$$((r-\rho+\lambda_n+\tfrac{3}{2})\ldots(r-\rho+\lambda_n+h+\tfrac{1}{2}))^{-1}\left\|D_x^{\lambda'} D_y^{r+1-\rho+\lambda_n+h}(y^k u)\right\|_{L^2(\omega_{a-b})}.$$

Notons A_1, A_2, A_3 les trois termes intervenant au second membre de cette inégalité et majorons les séparément.

$$\text{(IV.7)}\quad 1)\ \begin{cases} A_1\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-r-1}\,((2m+r+1)!)^{-s} \leq \\ \qquad (KM_1^{-1})\,(KM_2^{-1})^{r+1}\, M_2^{-2m}\,. \end{cases}$$

2) Dans A_2, comme $r+1-\rho+2m \leq 2m+r$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$A_2\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((2m+r+1)!)^{-s} \leq$$

$$\sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{1\leq\rho\leq r+1} \binom{r+1}{\rho} \binom{2m+r+1}{\rho}^{-s} K^{\rho+1}\, M_2^{-\rho}$$

ce qui fournit, avec une constante C indépendante de r :

$$\text{(IV.8)} \quad \begin{cases} \text{Pour } KM_2^{-1} < 1 \\ A_2\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((2m+r+1)!)^{-s} \leq C\, \dfrac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} \end{cases}$$

3) Dans A_3 , comme $r+1-\rho+\lambda_n+h \leq 2m+r$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$A_3\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((2m+r+1)!)^{-s} \leq$$

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\lambda=(\lambda',\lambda_n) \\ |\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\rho\leq r+1} K(KM_2^{-1})^{\rho}\, M_1^{|\lambda'|}\, M_2^{-2m+h+\lambda_n}$$

Avec une constante C indépendante de r on a donc :

Pour $M_1 > 1$, $M_2 > 1$, $KM_2^{-1} < 1$,

$$\text{(IV.9)} \quad A_3\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((2m+r+1)!)^{-s} \leq C M_1^{2m}\, M_2^{-1}\, (1-KM_2^{-1})^{-1}$$

En reportant (IV.7), (IV.8), (IV.9) dans (IV.6) on obtient enfin, pour une constante C indépendante de r :

$$\|D_y^{2m+r+1}\,(y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})}\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((2m+r+1)!)^{-s} \leq$$

$$C\left\{KM_1^{-1}\,(KM_2^{-1})^{r+1}\, M_2^{-2m} + \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} + \frac{M_1^{2m}\, M_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}}\right\}$$

Il suffit que les quantités KM_1^{-1} et $M_1^{2m}\, M_2^{-1}$ soient assez petites pour que cette dernière quantité soit inférieure à 1. Le choix des constantes M_1 et M_2 est bien indépendant de r, nous obtenons la conclusion de la première étape de la récurrence.

Deuxième étape de la récurrence.

En utilisant (II.1) et (III.1), écrivons (IV.5) pour $|\alpha| = j+1$:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\left\| D_x^{\alpha} D_y^{2m+r+1} (y^k u)\right\|_{L^2(\omega_{a-b})} \leq K^{j+r+3} ((j+r+2)!)^s + \\
\sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \rho\leq r+1 \\ |\beta|+\rho\neq 0}} \binom{(\alpha,r+1)}{(\beta,\rho)} K^{|\beta|+\rho+1} ((|\beta|+\rho)!)^s \times \\
((r-\rho+2m-h+\tfrac{3}{2}) \ldots (r-\rho+2m+\tfrac{1}{2}))^{-1} \left\| D_x^{\alpha-\beta} D_y^{r+1-\rho+2m} (y^k u)\right\|_{L^2(\omega_{a-b})} + \\
\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\lambda=(\lambda',\lambda_n) \\ |\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \rho\leq r+1}} \binom{(\alpha,r+1)}{(\beta,\rho)} K^{|\beta|+\rho+1} ((|\beta|+\rho)!)^s \times \\
((r-\rho+\lambda_n+\tfrac{3}{2}) \ldots (r-\rho+\lambda_n+h+\tfrac{1}{2}))^{-1} \left\| D_x^{\alpha-\beta+\lambda'} D_y^{r+1-\rho+\lambda_n+h} (y^k u)\right\|_{L^2(\omega_{a-b})}.
\end{cases}
\tag{IV.10}
$$

Notons A_1, A_2, A_3 les trois termes intervenant au second membre de cette inégalité et majorons les séparément.

$$
1) \begin{cases} A_1 M_1^{-j-2} M_2^{-2m-r-1} ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq \\ (KM_1^{-1})^{j+2} (KM_2^{-1})^{r+1} M_2^{-2m} \end{cases}
\tag{IV.11}
$$

2) Dans A_2 on a soit $|\alpha-\beta| \leq j$ et $r+1-\rho+2m \leq 2m+r+1$, soit $|\alpha-\beta| \leq j+1$, et $r+1-\rho+2m \leq 2m+r$; dans les deux cas, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On obtient, avec une constante C indépendante de j et r :

$$
A_2 M_1^{-j-2} M_2^{-2m-r-1} ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq
$$

$$
C \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \rho\leq r+1 \\ |\beta|+\rho\neq 0}} (K M_1^{-1})^{|\beta|} (K M_2^{-1})^{\rho}
$$

ce qui donne enfin, pour n $KM_1^{-1} < 1$ et $KM_2^{-1} < 1$

$$\text{(IV.12)} \quad \begin{cases} A_2\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq \\ C \left\{ \dfrac{1}{1-nKM_1^{-1}} \times \dfrac{K M_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} + \dfrac{n KM_1^{-1}}{1-n KM_1^{-1}} \times \dfrac{1}{1-KM_2^{-1}} \right\} . \end{cases}$$

3) Dans A_3, comme $r+1-\rho+\lambda_n+h \leq 2m+r$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$A_3\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq$$

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\lambda=(\lambda',\lambda_n) \\ |\lambda| \leq 2m-h \\ \lambda_n \neq 2m-h}} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \rho \leq r+1}} K (KM_1^{-1})^{|\beta|}\, (KM_2^{-1})^{\rho}\, M_1^{|\lambda'|}\, M_2^{-2m-\rho+\lambda_n+h}$$

ce qui fournit pour $M_1 > 1$, $M_2 > 1$, $n KM_1^{-1} < 1$, $KM_2^{-1} < 1$:

$$\text{(IV.13)} \quad \begin{cases} A_3\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq \\ C\, M_1^{2m}\, M_2^{-1}\, (1-n KM_1^{-1})^{-1}\, (1-KM_2^{-1})^{-1} . \end{cases}$$

Les inégalités (IV.11), (IV.12) et (IV.13) donnent dans (IV.10) :

$$\| D_x^{\alpha}\, D_y^{2m+r+1}\, (y^k u) \|_{L^2(\omega_{a-b})}\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq$$

$$C \left\{ (KM_1^{-1})^{j+2}\, (KM_2^{-1})^{r+1}\, M_2^{-2m} + \frac{1}{1-n KM_1^{-1}} \times \frac{KM_2^{-1}}{1-K M_2^{-1}} + \right.$$

$$\left. \frac{n KM_1^{-1}}{1-n KM_1^{-1}} \times \frac{1}{1-KM_2^{-1}} + \frac{M_1^{2m}\, M_2^{-1}}{(1-n KM_1^{-1})\, (1-KM_2^{-1})} \right\} .$$

On peut choisir M_1 grand vis à vis de K, puis M_2 grand vis à vis de M_1, le choix étant indépendant de $|\alpha|$ et r, pour que cette dernière quantité soit inférieure à 1. Ceci détermine la démonstration de la proposition IV.1.

V. CONCLUSIONS.

1°) Supposons que l'opérateur L donné par (I.1), les opérateurs frontières (B_j) donnés par (I.2), vérifient (I.7) pour toute fonction u de classe C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, à support contenu dans $\omega = \omega' \times [0,a[$. On obtient le résultat suivant :

Théorème V.1 :

Si les coefficients de L *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω, *les coefficients de* B *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω', *si* u *est une fonction de classe* C^∞ *sur* ω *telle que* Lu *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω, $B_j u$ *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω', $j=1,\ldots,X_p$, *alors la fonction* u *elle-même est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω.

Démonstration :

Soit $\mathcal{K}$ un compact contenu dans ω, il existe un réel b, $0 < b < a$, tel que $\mathcal{K} \subset \omega_{a-b}$. Par la proposition IV.1, on obtient :

$$\exists M > 0 \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \|D^\alpha (y^k u)\|_{L^2(\omega_{a-b})} \leq M^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s$$

ce qui montre que $y^k u$ est de classe de Gevrey d'ordre s sur ω.

En utilisant les inégalités (I.5), on obtient que u est une fonction de classe de Gevrey d'ordre s sur ω.

2°) A partir de l'étude locale précédente, nous pouvons obtenir des résultats de régularité globale.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0\}$$

où φ est une fonction de classe de Gevrey d'ordre s de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que grad $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\}$.

Si les opérateurs donnés par (0.1), (0.2) s'écrivent localement au voisinage d'un point de Γ, après transport sur $\mathbb{R}^n_+$, sous la forme (I.1) (I.2) avec les inégalités a priori (I.7), on obtient le résultat global suivant :

Théorème V.2.

Si les coefficients de $\mathcal{L}$ *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\overline{\Omega}$ *et les coefficients de* $\mathcal{B}$ *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* Γ, *si* u *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\overline{\Omega}$ *telle que* $\mathcal{L}u$ *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\overline{\Omega}$, $\mathcal{B}_j u$ *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* Γ, *alors* u *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\overline{\Omega}$.

Pour $k \geq 1$, P. BOLLEY et J. CAMUS [2] donnent des conditions suffisantes pour réaliser ces hypothèses. On retrouve les résultats de M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [1] pour un opérateur du type (0.1) avec k = 1, m = 1. Ces résultats s'appliquent en particulier aux opérateurs dégénérés étudiés par C. ZUILY [6].

Pour k = 0, $\mathcal{L}$ est un opérateur proprement elliptique sur $\overline{\Omega}$. Les résultats s'appliquent dès que des inégalités a priori du type (I.7) sont vérifiées (voir [3] par exemple). On retrouve les résultats de régularité dans les classes de Gevrey donnés par J.L. LIONS et E. MAGENES dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. E.N.S. Paris (1971).

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à plusieurs variables. Thèse. Rennes 1972.

[3] J.L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Tomes 1 et 3 (Dunod) Paris 1968-1970.

[4] C.B. MORREY - L. NIRENBERG : On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 7, 271-290 (1957).

[5] N. SHIMAKURA : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. Journal of Mathematics of Kyoto University. Vol. 9 - N° 2 - 1969.

[6] C. ZUILY : Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre. Thèse 3ème Cycle. Paris 1969.

TABLE DES MATIERES

1. ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS. APPLICATION AU PROBLEME DE DIRICHLET DANS UN DEMI-ESPACE ..... p. 1

2. REGULARITE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES DU DEUXIEME ORDRE ..... p. 40

3. CARACTERISATION DE CLASSES DE FONCTIONS C^{∞} ET ANALYTIQUES SUR UNE VARIETE IRREGULIERE A L'AIDE D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL ..... p. 92

4. ETUDE DE L'ANALYTICITE ET DE LA REGULARITE GEVREY POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES ..... p. 131

V U :

Le Président de la Thèse

VU

Le Directeur de Thèse

VU ET APPROUVE

RENNES, le 10 juillet 1972

Le Directeur de l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique :

J. HOUDEBINE

VU ET PERMIS D'IMPRIMER N° 105 A

RENNES, le 28 juillet 1972

Le Président de l'Université de RENNES :

C. CHAMPAUD